Anwendungen P/L

Notiztitel 21.11.2016

Stetigkeit der Lösung eines AWP in Parametern:

$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, \quad (x, \lambda) \mapsto F_\lambda(x)$

$v \in \mathbb{R}^n$

Lösung des AWP für $f: T \to \mathbb{R}^n, \quad f'(t) = F_\lambda(f(t))$

lässt sich durch den Fluss schreiben als

$f \quad t \mapsto \varphi_\lambda(t, v)$

Behauptung: Die Funktion $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, (t, v, \lambda) \mapsto \varphi_\lambda(t, v)$ ist stetig in λ.

BW: $\bar{F}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$(x, \lambda) \mapsto (F_\lambda(x), 0)$$

$$\bar{\varphi}(t, (x, \lambda)) = (\varphi_\lambda(t, x), \lambda)$$

AWP definiert durch $\bar{F}$: Gesucht $\bar{f}: T \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$,

$\bar{f}(t) = (y(t), \lambda(t))$

$$y'(t) = F_\lambda(y(t))$$
$$\lambda'(t) = 0 \qquad (\lambda \text{ ist Konstant})$$

y ist daher Lösung des ursprünglichen AWPs

y hängt stetig vom AW (V, λ) ab $\square$

Es gilt sogar: Die Lösung ist Lipschitz-stetig im Parameter λ, sobald F_λ differenzierbar ist

Letzte Anwendung:

Es sei $F: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig diffbar,

$D \subseteq T \times U$ die Definitionsmenge des Flußes

$\varphi: (t, x) \mapsto \varphi(t, x)$ Lösung des AWP mit AW x an der Stelle t.

Behauptung: φ ist differenzierbar.

BW für $n = 1$.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = \varphi(t, x) \quad \text{Da } t \mapsto \varphi(t, x) \text{ die DG erfüllt.}$$

Restlich zu zeigen daß $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ existiert und stetig ist

Für $y \neq x$ ist

$$\frac{\varphi(t,y)-\varphi(t,x)}{y-x} =: h(t)$$

$$h'(t) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,y) - \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,x)}{y-x} = \frac{F(\varphi(t,y)) - F(\varphi(t,x))}{y-x}$$

$$= \frac{F(\varphi(t,y)) - F(\varphi(t,x))}{\underbrace{\varphi(t,y)-\varphi(t,x)}_{\neq 0\,!}} \cdot \frac{\varphi(t,y)-\varphi(t,x)}{y-x}$$

$$= H(x,y,t) \cdot h(t)$$

Das ist eine lineare DG für $h: I \to \mathbb{R}^n$

erfüllt Lipschitz, Lösung des AWP stetig im AW und in Parametern

Fassen y als Parameter auf

$$h_y'(t) = H(x,y,t)\, h_y'(t)$$ Lösung hängt von y ab

$\lim_{y \to x} h_y(t)$ ist die Lösung des AWP für $\bar{h}$

$$\bar{h}'(t) = \left(\lim_{y\to x} H(x,y,t)\right) \bar{h}(t)$$

$$\lim_{y\to x} H(x,y,t) = \lim_{y\to x} F'(\varphi(t,x))$$

$\bar{h}$ existiert, löst das AWP $\bar{h}'(t) = F'(\varphi(t,x))\bar{h}(t)$

AB $h'(a) = 1$

daher existiert $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) = T_x(t)$.

B für Fluß: $F(x) = x^2$

$t \mapsto \varphi(t,x)$ löst das AWP für f: $f'(t) = f(t)^2$,

$f(0) = x$

$D = \{(t,x) \mid xt < 1\}$.

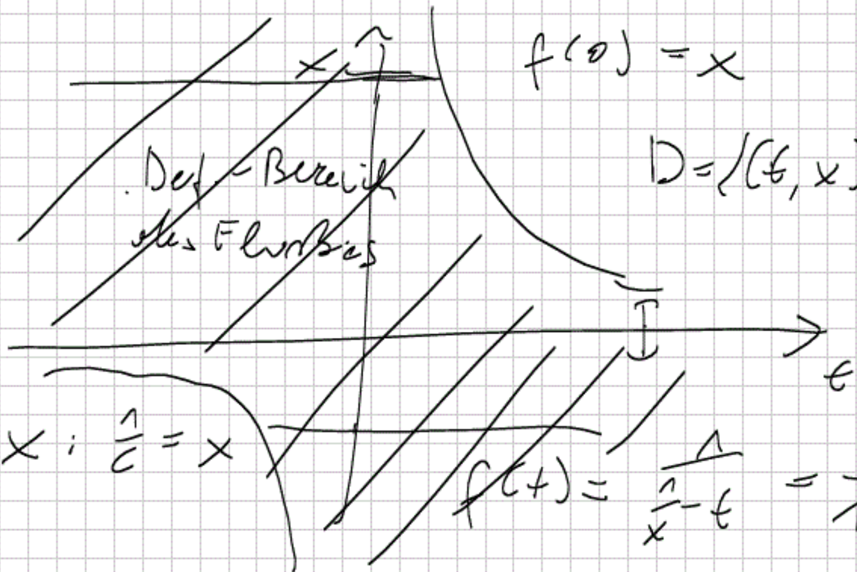
Lösung ist

$\varphi(t,x) =$

$f(t) = \frac{1}{c-t}$

Wählen c so, daß $f(0) = x$: $\frac{1}{c} = x$

$\varphi(t,x) = \frac{x}{1-xt}$



$f(t) = \frac{1}{\frac{1}{x}-t} = \frac{x}{1-xt}$

Zur späteren Verwendung: Ableitung von φ bei $(0,v)$:

$\varphi(0,v) = v$ partiellen Ableitung

$$\frac{\partial \varphi(t, x_1 \dots x_n)}{\partial x_j} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} t \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,v) = F(v)$$

$$J_{(0,v)}(\varphi) = \left(\begin{array}{c|c} I_n & F(v) \end{array} \right) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)} \quad \text{Matrix}$$

Lokales Verhalten von dynamischen Systemen.

Diskreter Fall: $T = \mathbb{N}$, $F : U \to U$ sei stetig

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen.

$x \in U$. Nehmen an x_0 ist Fixpunkt. $F(x_0) = x_0$

Rekursion für $f : T \to U$: $f(t+1) = F(f(t))$.

Satz: Wenn alle Eigenwerte der Jacobi-Matrix $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}$ Betrag kleiner 1 haben, dann ist x_0 asymptotisch stabil, dh für jedes y_0 in einer geeigneten Umgebung konvergiert die Folge $(F^{(n)}(y_0))_n$ gegen x_0.

(Für lineare F schon gezeigt)

Lemma: Wenn $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung ist, deren Eigenwerte Betrag kleiner 1 haben, dann existiert ein positiv definites Skalarprodukt

$\langle\, , \rangle_B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle_B = \langle v, Bw \rangle \; (= v^t \cdot B \cdot w)$,

sodaß $\langle Av, Av \rangle \leq \langle v, v \rangle$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

und $\langle Av, Av \rangle < \langle v, v \rangle$ falls $v \neq 0$

Achtung: Man kann nicht immer das Standard (euklidische) Skalarprodukt nehmen.

B $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Av = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

$\|Av\| = \sqrt{\frac{5}{4}}$, $\|v\| = 1$. Nimm ein anderes Skalarprodukt!

Landau O-Notation.

Ein Ausdruck $F(x)$ ist $O(G(x))$

wenn C existiert mit $F(x) \leq C \cdot G(x) \quad \forall x$

$F(x) = o\, G(x)$ wenn
für alle $c > 0$ $\exists U \geq 0$ sodass $F(x) \leq c \cdot G(x)$.

Rechenregeln für O, o:

Beispiele $x^n = o(x^m)$ falls $n \geq m$

Falls $f(x) = o(g(x))$ und $h(x) = o(g(x))$
ist auch $f(x) + h(x)$ ein $o(g(x))$

Vorsicht $x^2 = o(x)$, $x^3 = o(x)$ Nicht: $x^2 = x^3$

$\left(x^2 + o(x^2)\right) \cdot x = x^3 + x \cdot o(x^2) = x^3 + o(x^3)$.

Allg.: $f(x) \cdot o(g(x)) = o(f(x) \cdot g(x))$

$f(x) \cdot (g(x) + o(h(x))) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot o\, h(x)$

Zum Beispiel kann man statt:
x_0 ist stabiler Gleichgewichtspunkt
einfach schreiben $f^n(y_0) = x_0 + O(1)$

(asymptotisch stabil: $f^n(y_0) = x_0 + o(1)$)

BW des Satzes oben

Sei x_0 ein Fixpunkt, $\left(\frac{\partial F}{\partial(x_1, \ldots x_n)}\right)\Big|_{x_0} := L$ hat EW mit Betrag kleiner 1.

Anwendung des Lemmas:
Es gibt ein Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$ mit $\|Lv\| < \|v\| \quad \forall v \neq 0$.

Dann existiert $c < 1$, sodaß $\|Lv\| \le c \cdot \|v\| \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$.

(die Einheitskugel ist kompakt, wähle
$c := \max\{\|Lv\| \,/\, \|v\| = 1\}$.)

$$F(x) = F(x_0) + L \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|)$$

$$\langle F(x) - x_0, F(x) - x_0 \rangle = \langle L \cdot (x - x_0) + o(\|x - x_0\|), L(x - x_0) + o(\|x - x_0\|) \rangle$$

$$= \langle L(x - x_0), L(x - x_0) \rangle + 2 \langle L(x - x_0), o(\|x - x_0\|) \rangle +$$
$$\langle o(\|x - x_0\|), o(\|x - x_0\|) \rangle$$

$$\le c \cdot \|x - x_0\|^2 + 2 \cdot c \|x - x_0\| \, o(\|x - x_0\|) + o(\|x - x_0\|)^2$$

$$= c \cdot \|x - x_0\|^2 + c' \, o(\|x - x_0\|)^2 + o(\|x - x_0\|^2) =$$

$= (c+\varepsilon)\, \|x-x_0\|^2$ für jedes $\varepsilon > 0$

Man kann ε so wählen, daß $c+\varepsilon < 1$ ist.

Dann ist $\|f(x) - f(x_0)\| \leq (c+\varepsilon)\, \|x - x_0\|$

Und die Folge $y_0, f(y_0), \ldots$ konvergiert gegen x_0.

ohne Beweis: wenn mindestens ein Eigenwert Betrag > 1 hat, dann ist x_0 nicht stabil.
(gezeigt für lineares F, gilt allgemein)