Folgerungen aus Picard/Lindelöf

Notiztitel 15.11.2016

Nachtrag zu P/L (Beweis): es ist noch zu zeigen, daß der Operator $PL: C^0(T, \mathbb{R}^n) \to C^0(T, \mathbb{R}^n)$ Lipschitz-stetig mit Konstante < 1 ist.

$n \in \mathbb{N}$, $T = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $F: T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, F stetig und erfüllt

$$\| F(t, x_1) - F(t, x_2) \| \leq L_F \cdot \| x_1 - x_2 \| \quad \text{für ein festes } L_F > 0.$$

$$PL: \quad f \mapsto \left(t \mapsto v + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))\, ds \right).$$

Seien $f_1, f_2 \in C^0(T, \mathbb{R})$

Abschätzung von $\| f_1 - f_2 \|$

$$\| f_1(t_1) - f_2(t_1) \| = \| \cancel{y} + \int_{t_0}^{t_1} F(s, f_1(s))\, ds - \cancel{y} - \int_{t_0}^{t_1} F(s, f_2(s))\, ds \|$$

$$\leq \| \int_{t_0}^{t_1} \left(F(s, f_1(s)) - F(s, f_2(s)) \right) ds \| \leq \quad (t_1 > t_0)$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \| F(s, f_1(s)) - F(s, f_2(s)) \|\, ds \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t_1} L_F \, \| f_1(s) - f_2(s) \|\, ds \leq$$

$$\leq \sup_{s \in T} \| f_1(s) - f_2(s) \| \cdot L_F \cdot (t_1 - t_0)$$

$$\leq \| f_1 - f_2 \| \, L_F \, (b-a)$$

Damit ist gezeigt $\| PL(f_1) - PL(f_2) \| \leq \underbrace{L_F \cdot (b-a)}_{L_{PL}} \cdot \| f_1 - f_2 \|$.

Wenn $L_F \cdot (b-a) \geq 1$ sein sollte, zeigt man Existenz/Eindeutigkeit durch Zerlegung von T in kleinere Teilintervalle.

Ende Nachtrag.

n, T, F wie oben $F: T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Zwei Anfangswerte $v, w \in \mathbb{R}^n$ 2 Lösungen der DG für $y: T \to \mathbb{R}^n$

$$y'(t) = F(t, y(t)) \quad \forall t \quad : \quad f, g: T \to \mathbb{R}^n$$

Unterschiedl. Anfangswerte $f(t_0) = v$, $g(t_0) = w$.

Wollen $\| f(t_1) - g(t_1) \|$ abschätzen.

PL-Operator, mit Fixpunkt f:

$$PL: y \mapsto \left(t \mapsto \int_{t_0}^{t_1} F(s, y(s))\,ds + v \right)$$

$$PL(f) = f$$

Folge von Funktionen $y_i: T \to \mathbb{R}^n$ für $i = 0, 1, 2$.

$y_0 = g$, $y_{i+1} = PL(y_i)$. $\lim_{i\to\infty} y_i = f$

$\| g - f \| \leq \dfrac{\| g - PL(g) \|}{1 - L_{PL}}$ $\quad L_{PL} = |t_1 - t_0| \cdot L_F$

Abschätzung des Zählers:

$\| PL(g)(t) - g(t) \| =$

$\left\| \int_{t_0}^{t} F(s, g(s))\, ds + v - g(t) \right\| = \left\| \int_{t_0}^{t} g'(s)\, ds + v - g(t) \right\|$

$= \| \cancel{g(t)} - g(t_0) + v - \cancel{g(t)} \| = \| v - w \|$

$$\|f - g\| \leq \frac{\|v - w\|}{1 - L_F|t_1 - t_0|}$$ unter Vorr. $L_F|t_1 - t_0| < 1$

$$\|f(t_1) - g(t_1)\| \leq \frac{\|v - w\|}{1 - L_F \cdot |t_1 - t_0|}$$

Funktion $T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$(t, v) \mapsto f(t)$, wobei f die eindeutige Lösung des AWP mit $f(t_0) = v$ ist

"Fluß" einer DG $\quad (t, v) \mapsto \varphi(t, v)$

Obiger Beweis zeigt φ ist stetig in t, v, Lipschitz-stetig in v.

Satz: Es seien f, g Lösungen der DG oben.

Dann existiert eine Konstante $C > 1$, sodaß

$$\forall t \in T \quad \|f(t) - g(t)\| \le C^{|t-t_0|} \|f(t_0) - g(t_0)\|$$

Beweis. Wenn $L_F < 1$, Dann gilt $\forall t_1$ mit $|t_0 - t_1| \le 1$:

$$\|f(t_1) - g(t_1)\| \le \underbrace{\frac{1}{1-L_F}}_{C} \|f(t_0) - g(t_0)\|$$

$t_0 = 0, \quad t_1 = 1, \quad t_2 = 2, \ldots$

$$\|f(1) - g(1)\| \le C \|f(0) - g(0)\|$$

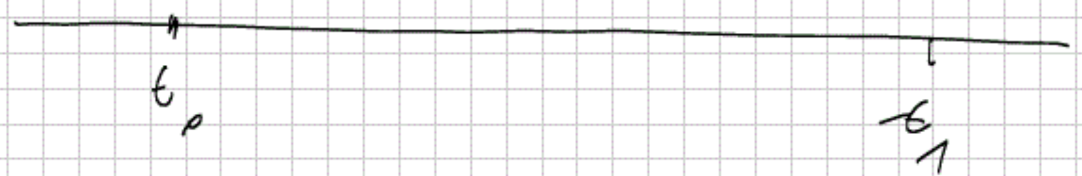
$$\|f(2) - g(2)\| \le C \|f(1) - g(1)\| \le C^2 \|f(0) - g(0)\|$$

etc

$$\rightsquigarrow \|f(m) - y(m)\| \le C^m \, \|f(0) - y(0)\|$$

Wenn $L_f \geq 1$ muß man in entsprechend kleinere Intervalle unterteilen.

Frage: Wie ist die optimale Unterteilung in Teilintervalle, sodass man $\|f(t_1) - y(t_1)\| \le C \cdot \|f(t_0) - y(t_0)\|$



für möglichst kleines C bekommt?

Fehleranalyse von numerischen Verfahren:

Euler'sches Polygonzugverfahren.

AWP: Gesucht $f: \underbrace{[0,1]}_{T} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$\forall t: \quad f'(t) = F(f(t))$, $\quad F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitz-stetig und beschränkt.

$f(0) = y_0$

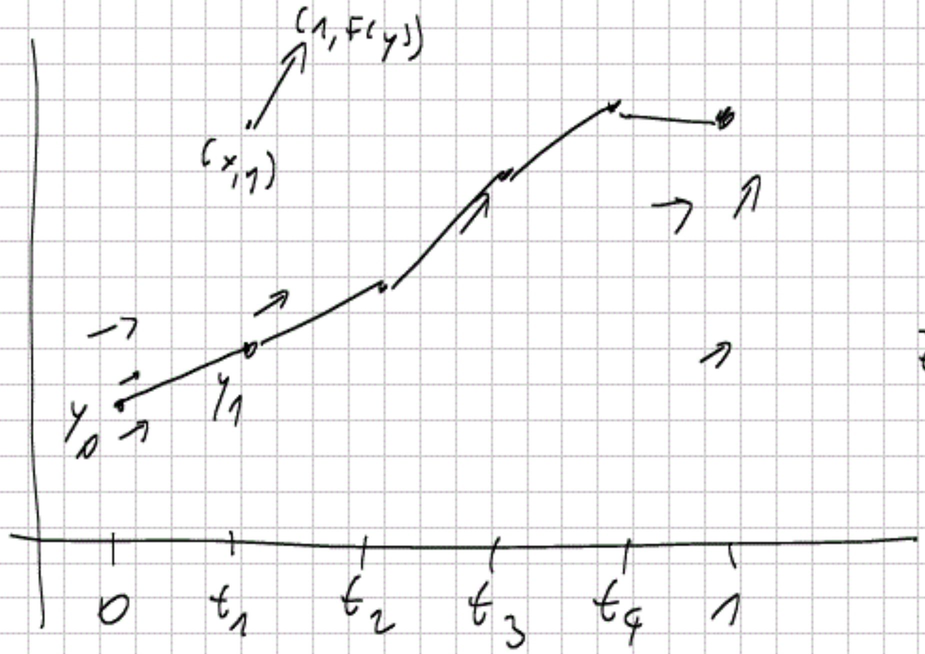
Zerlegung von T in N Teilintervalle

$T = [t_0, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \ldots \cup [t_{N-1}, t_N]$,

wobei $t_i := \frac{i}{N}$

Rekursiv definierte endliche Folge: y_0 ist AW gegeben,

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{N} F(y_i)$$



$z: T \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$z(t_i) = y_i$$

$$z(t) = z(t_i)\lambda + z(t_{i+1})(1-\lambda)$$

falls $t = \lambda t_i + (1-\lambda) t_{i+1}$ für $\lambda \in [0,1]$ ist

z ist "Näherungslösung" für AWP.

Wollen $\| z - f \|$ abschätzen, wenn f die Lösung des AWP ist.

PL-Iteration mit $PL(f) = f$

$g_0 := z$, $g_1 = PL(z)$, $\ldots$ $g_{i+1} = PL(g_i)$,

$$\lim_{i \to \infty} g_i = f$$

$$\| g_0 - f \| \leq \frac{\| g_0 - g_1 \|}{1 - L_{PL}}$$

$L_{PL} = L_F$ (sei < 1)

Abschätzen des Zählers: Für $b = 1$

$$\left\| \int_0^1 F(z(s))\, ds + y_0 - z(t) \right\| =$$

$$\left\| \int_0^{t_1} F(z(s))\,ds + \int_{t_1}^{t_2} F(z(s))\,ds + \dots + y_0 - y_1 + y_1 - y_2 \dots - \overset{z(1)}{\overset{\shortparallel}{y_N}} \right\|$$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t_1} F(z(s))\,ds - (y_1 - y_0) + \int_{t_1}^{t_2} F(z(s))\,ds - (y_2 - y_1) + \dots \right.$$

$$\left. \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n = 1} F(z(s))\,ds - (y_N - y_{N-1}) \right\|$$

Jeder einzelne Integrand kann abgeschätzt werden:

$$\left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(z(s))\,ds - (y_{i+1}-y_i) \right\| = \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} F(z(s))\,ds - F(y_i)\cdot\frac{1}{N} \right\|$$

$$= \left\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \big(F(z(s)) - F(y_i)\big)\,ds \right\| \le L_F \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|z(s)-y_i\|\,ds$$

$$= L_F \cdot \int_0^{\frac{1}{N}} \|F(y_i)\cdot s\|\,ds = L_F \cdot \|F(y_i)\| \cdot \frac{1}{2N^2}$$

Daher kann das Gesamtintegral abgeschätzt werden durch $L_F \cdot M_F \cdot \frac{1}{2N}$, wobei M_F eine Schranke für $\|F(t)\|$ ist.