Existenz & Eindeutigkeit 2

Notiztitel 14.11.2016

Fixpunktsatz von Banach:

Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum.

Es sei $f: X \to X$ eine Funktion.

Wir nehmen an f ist Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $L<1$.

Dann hat f einen eindeutigen Fixpunkt.

—

Wh.: Axiome der Metrik $d: X \times X \to \mathbb{R}$

- $d(x,y) \geq 0 \qquad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \qquad \forall x,y,z \in X$.
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

$\bar{X}$ heißt vollst. $\Longleftrightarrow$ Jede Cauchy-Folge konvergiert.

Folge $(x_n)_n$ heißt konvergent wenn $\bar{x} \in \bar{X}$ mit
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \quad d(\bar{x}, x_{N+n}) < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Folge heißt Cauchy wenn
$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \quad d(x_{N+n_1}, x_{N+n_2}) < \varepsilon \quad \forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

Beweis von BFS: Es sei $(x_n)_n$ eine Folge definiert durch
$x_0 \in \bar{X}$ beliebig, $\quad x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
$$d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq L^n d(f(x_0), f(x_1))$$
BW durch Induktion nach n: $\quad n = 0$ trivial.

Ann, Beh gilt für n; zeigen sie für $n+1$:

$$d(f(x_{n+1}), f(x_{n+2})) = d(f(f(x_n)), f(f(x_{n+1})))$$
$$\leq L \cdot d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq L \cdot L^n d(f(x_0), f(x_1))$$
$$= L^{n+1} d(f(x_0), f(x_1)) \square$$

Zeigen daß die Folge eine CF ist:

$$d(f(x_N), f(x_{N+m})) \leq$$
$$d(f(x_N), f(x_{N+1})) + d(f(x_{N+1}), f(x_{N+2})) + \dots + d(f(x_{N+m-1}), f(x_{N+m}))$$
$$\leq (L^N + L^{N+1} + \dots + L^{N+m-1}) d(f(x_0), f(x_1)) \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} L^{N+i} \cdot d(f(x_0), f(x_1)) = \frac{1}{1-L} L^N \cdot d(f(x_0), f(x_1))$$

$$= L^N \cdot \frac{d(f(x_0), f(x_1))}{1-L}$$

$\downarrow$ geht für $N \to \infty$ gegen 0

Daher ist $(x_n)_n$ eine CF

$$\bar{x} := \lim_{n\to\infty} x_n.$$

$$f(\bar{x}) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0) = \bar{x}$$

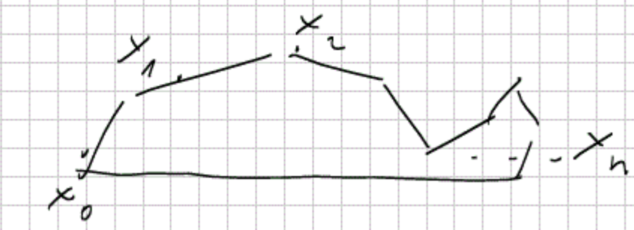
$\rightsquigarrow$ $\bar{x}$ ist Fixpunkt. Noch zu zeigen: $\bar{x}$ ist der einzige FP

Sei $\bar{y}$ ein zweiter Fixpunkt.

$$\underbrace{d(f(\bar{x}), f(\bar{y}))}_{= d(\bar{x}, \bar{y})} \le L \cdot d(\bar{x}, \bar{y}) \rightsquigarrow d(\bar{x}, \bar{y}) = 0, \quad \bar{x} = \bar{y}.$$

Korollar aus dem Beweis:

$$d(\bar{x}, x_0) \le \frac{d(x_0, x_1)}{1 - L}$$



BW des Korollars: $\forall n: \; d(x_n, x_0) \le d(x_1, x_0) + d(x_2, x_1) + \dots$

$$\le d(x_1, x_0)(1 + L + L^2 + \dots + L^{n-1}) \le \frac{d(x_1, x_0)}{1 - L}$$

gilt für alle x_n, daher auch für $\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{x}$.

$\mathfrak{X} := C^0(T, \mathbb{R}^n)$ $\quad T \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes endliches Intervall.

$d(f,g) := \| f - g \|_\infty$

$\| f \|_\infty := \sup_{t \in T} \| f(t) \|$ gültig, weil auf kompakten Mengen jede stetige Funktion beschränkt ist.

Axiome für Norm:

$\| f \|_\infty \geq 0$, $\quad \| f \|_\infty = 0 \iff f \equiv 0$

$\| \lambda \cdot f \|_\infty = |\lambda| \, \| f \|_\infty \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f \in \mathfrak{X}$

$\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$ Bw Übung.

2 Begriffe für Konvergenz von Funktionenfolgen

Sei $(f_n)_n$ eine Folge von Funktionen in X $(= C^0(T, \mathbb{R}^n))$

$(f_n)_n$ heißt punktweise konvergent, wenn

$\forall t \in T$ $(f_n(t))_n$ konvergent ist.

$\bar{f} : T \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ heißt Grenzfunktion.

[Bem: Die Grenzfunktion erfüllt:

$\forall t \in T$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $\| f_{N+n}(t) - \bar{f}(t) \| < \varepsilon$.]

Die Folge $(f_n)_n$ heißt glm konvergent gegen $\bar{f}$ wenn:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall t \in T\ \forall n \in \mathbb{N}: \| f_{N+n}(t) - \bar{f}(t) \| < \varepsilon$.

N darf nicht von t abhängen!

Proposition: $(f_n)_n$ ist gdw gleichmäßig konvergent wenn sie konvergent in $(\bar{X}, d)$ ist:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n: \sup_{t \in T} \| f_{N+n}(t) - \bar{f}(t) \| < \varepsilon$.

Satz: (X, d) ist ein vollst. metrischer Raum.

Bw: Es sei: $(f_n)_n$ eine Cauchy-Folge:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n_1, n_2\ \forall t \in T: \| f_{N+n_1}(t) - f_{N+n_2}(t) \| < \varepsilon$

(1) (f_n) ist punktweise konvergent.

Es sei $t \in T$. Die Folge $(f_n(t))_n$ ist Cauchy. Weil $\mathbb{R}^n$ vollständig ist, existiert GW

$$\bar{f} : t \to \lim_{n \to \infty} f_n(t)$$

Noch zu zeigen $\bar{f} : T \to \mathbb{R}^n$ ist stetig.

Es sei $t_0 \in T$. Zeigen $\bar{f}$ ist stetig in t_0: $\forall \varepsilon > 0$:
Müssen δ finden sodaß $\| \bar{f}(t_\delta) - \bar{f}(t_0) \| < \varepsilon \; \forall t_\delta$ in einer δ-Umgebung von t_0.

Aus der Annahme $\exists N$ sodaß $\| \bar{f} - f_{N+n} \|_\infty < \varepsilon/3$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Speziell $\| \bar{f} - f_N \|_\infty < \varepsilon/3$, dh $\| \bar{f}(t) - f_N(t) \| < \varepsilon/3 \; \forall t$

f_N ist stetig, dh. $\exists \delta : |t_\delta - t_0| < \delta \Rightarrow \| f_N(t_\delta) - f_N(t_0) \| < \varepsilon$

Denn ist:

$$\| \bar{f}(t_\delta) - \bar{f}(t_0) \| \leq \underbrace{\| \bar{f}(t_\delta) - f_N(t_\delta) \|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{\| f_N(t_\delta) - f_N(t_0) \|}_{< \varepsilon/3} + \underbrace{\| f_N(t_0) - \bar{f}(t_0) \|}_{< \varepsilon/3} < \varepsilon.$$

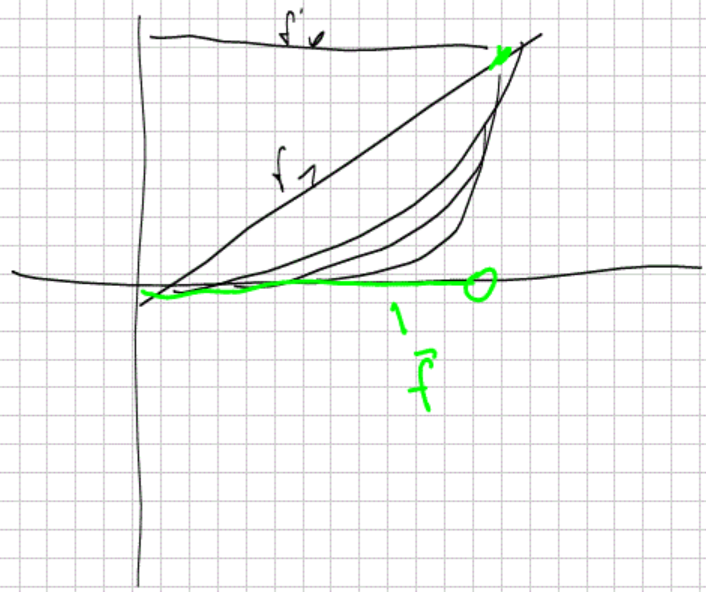
$\square$

Frage: Ist auch die punktweise Grenzfunktion einer Folge von Funktionen immer stetig?

Gegenbeispiel: $T = [0,1]$, $f_n : t \mapsto t^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

f_n ist stetig.

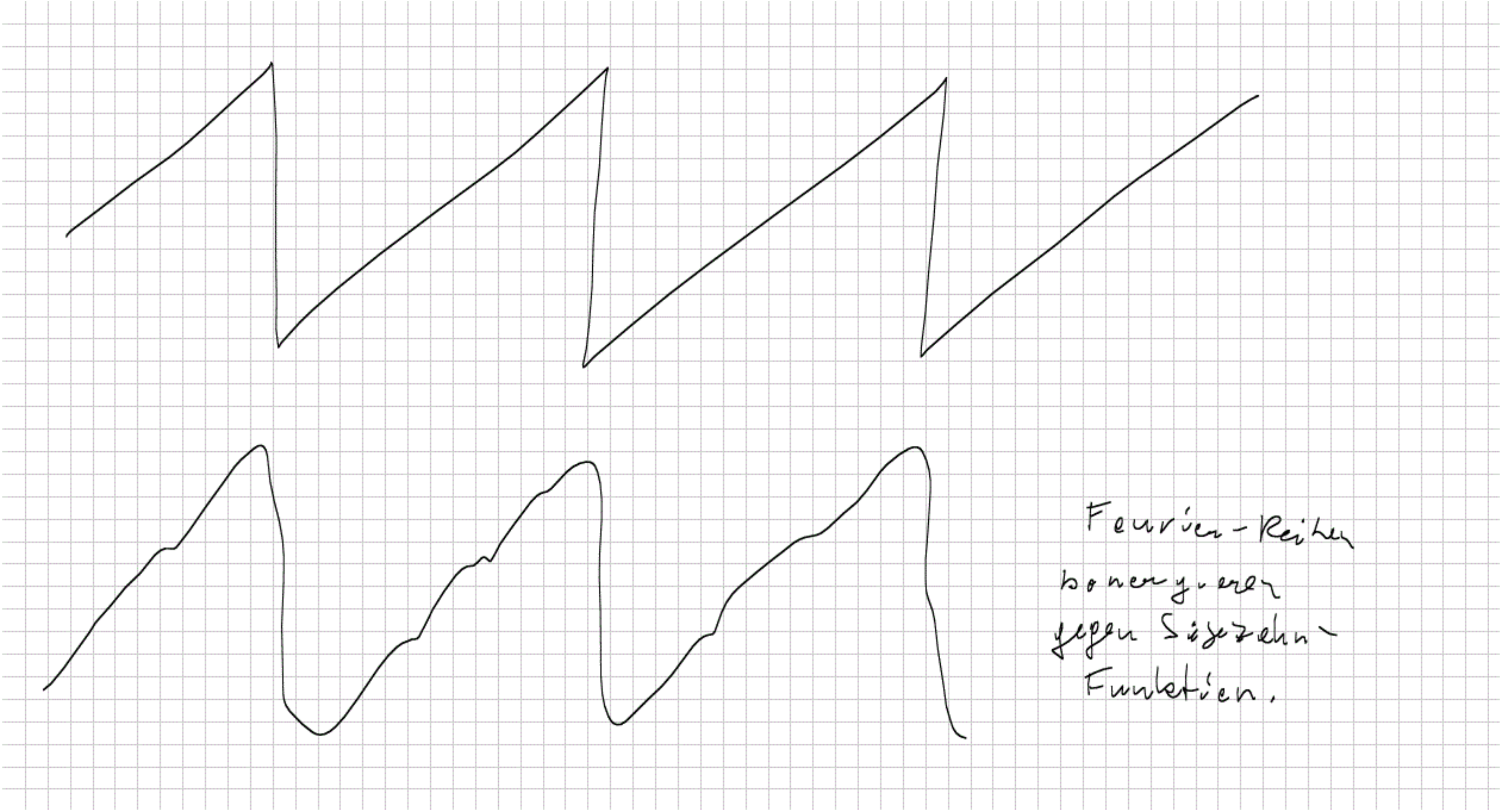
$$\lim_{n\to\infty} f_n(t) = \lim_{n\to\infty} t^n = \begin{cases} 0 & \text{falls } t \in [0,1) \\ 1 & \text{falls } t = 1 \end{cases}$$ nicht stetig!



Geschichtliche Abschweifung zur gleichmäßigen Konvergenz

Nachwort von Worall/Zahar aus: I. Lakatos, Proofs & their Refutations.

Satz von Cauchy im Cours d'Analyse: Wenn $(f_n)_n$ eine Folge von stetigen Funktionen ist, und punktweise gegen $\bar f$ konvergiert, dann ist $\bar f$ stetig.


Fourier-Reihen
konvergieren
gegen Sägezahn-
Funktion.