Der Satz von Picard/Lindelöf

Notiztitel 08.11.2016

$f: X \to Y$ X, Y metrische Räume

heißt glm stetig $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$

$d(x_1, x_2) < \delta \implies d(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$

B stetig, aber nicht glm stetig: $f: x \mapsto x^2$, $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

B glm stetig, aber nicht Lipschitz-stetig: $f: x \mapsto |x|^{\frac{1}{2}}$, $[0,1] \to [0,1]$

Satz: Wenn X kompakt, $f: X \to Y$ stetig, dann ist f glm stetig.

BW: Indirekte Annahme, f nicht glm stetig.

$\exists \varepsilon_0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_1, x_2$ mit $d(x_1, x_2) \leq \delta$, $d(f(x_1), f(x_2)) > \varepsilon_0$.

Wählen $\delta = \frac{1}{n}$, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

$\exists x_n, y_n$ sodaß $d(x_n, y_n) \leq \delta$, $d(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon_0$.

Weil X kompakt ist, hat $(x_n)_n$ eine konvergente Teilfolge $(x_{k_n})_n$ $\quad \lim_{n \to \infty} x_{k_n} = \bar{x}$

$f(\bar{x}) = \lim_{n \to \infty} f(x_{k_n})$

$\forall n: d(y_n, \bar{x}) \leq \frac{1}{n}$

$\lim_{n \to \infty} y_n = \bar{y}$

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = f(\bar{x}) \quad \lightning \quad d(f(x_n), f(y_n)) > \varepsilon_0$$

$\square$

Zur Erinnerung

AWP $n = 1$, $T = \mathbb{R}$, $F(t, x) = 3 \cdot x^{\frac{2}{3}}$

für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(t) = 3 f(t)^{2/3} \quad \forall t$,

$$f(0) = 0$$

Eine Lsg $f(t) = t^3$, zweite Lsg $f(t) = 0$

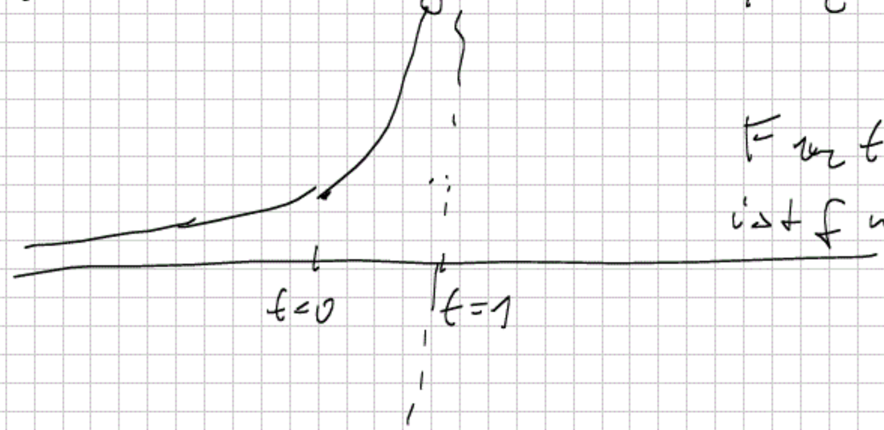
$x \longmapsto 3 \cdot x^{2/3}$ ist nicht Lipschitz-stetig

(B) $F(t, x) = x^2$ $\leftarrow$ nicht Lipschitz-stetig.

$f'(t) = f(t)^2 \quad \forall t,$

$f(0) = 1$

AWP (mit TdV) hat die Lsg $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$



Für $t > 1$ ist f nicht definiert.

 01/11/2017 09:46 AM

Für $T = \mathbb{R}$, $F : T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$F(t, x) = A(t) \cdot x$, $A : T \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig

Frage: Ist dieses F Lipschitz-stetig in x?

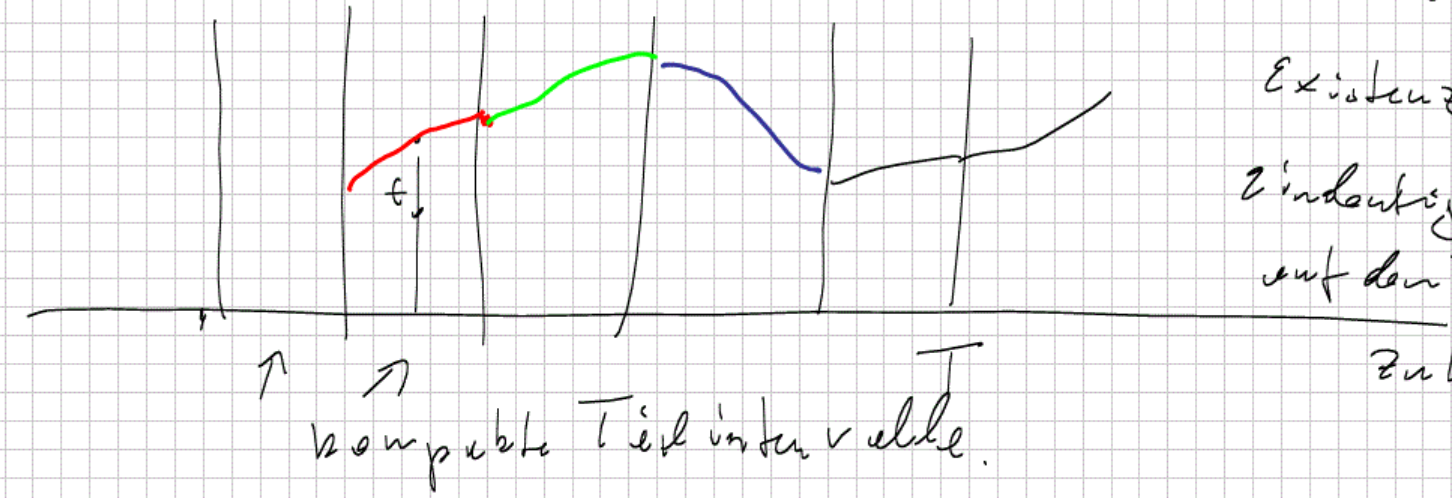
$$\| F(t, x_1) - F(t, x_2) \| = \| A(t) \cdot x_1 - A(t) \cdot x_2 \| =$$

$$\| A(t) \cdot (x_1 - x_2) \| \leq \| A(t) \| \, \| x_1 - x_2 \|$$

Antwort: Ja, wenn $\| A(t) \|$ beschränkt ist

sonst nicht.

Verallgemeinerung von P-L (Abschwächung der Voraussetzung).
Wenn $F: T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ in jedem kompakten Teilintervall von T Lipschitz-stetig in der zweiten Variable ist, dann besitzt das AWP wie eben eine eindeutige Lösung.
BW für Verallg. unter der Annahme der ursprünglichen Formulierung:



es reicht,
Existenz und
Eindeutigkeit
auf den Teilintervallen
zu haben.

Anwendungen im autonomen Fall:

$f(0) = x_0 \in U$.

F hängt nicht von t ab, AWP: $f'(t) = F(f(t))$

$F: U \to \mathbb{R}^n$ Richtungsfeld, oft ist $U \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^n$.

Satz (Korollar aus P-L): Wenn F differenzierbar ist, dann existiert eine eindeutige Lösung in einer geeigneten Umgebung T_0 von $0 \in T$.

Zum Beweis: P-L kann nicht sofort angewandt werden:

(1) P-L verlangt $F: T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (nicht von $T \times U \to \mathbb{R}^n$)

(2) F ist nur differenzierbar, nicht unbedingt Lipschitz-stetig

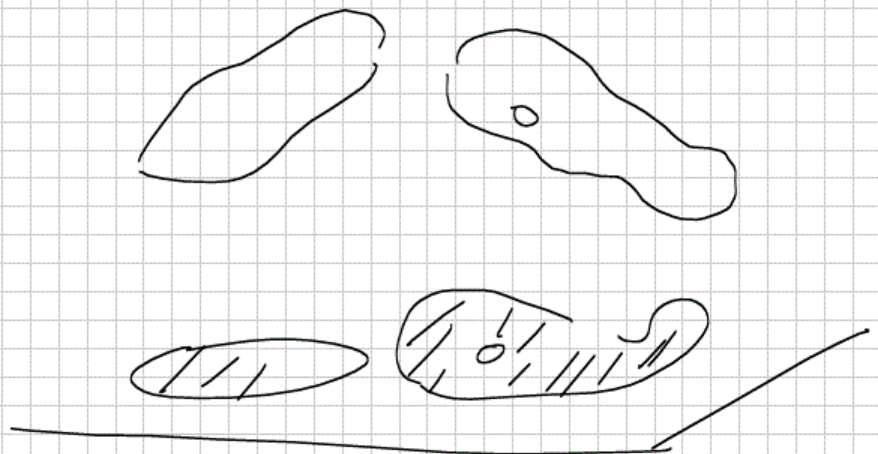
Zu (2): Wenn F diffbar ist, ist Ableitung beschränkt in jeder kompakten Umgebung von x_0. Einschränken auf eine solche Umgebung, dort Lipschitz.

<u>Lemma</u>: Wenn $f: U \to \mathbb{R}^n$ mit $U \subseteq \mathbb{R}^m$ Lipschitz-stetig ist, dann existiert eine Fortsetzung $\overline{f}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $\overline{f}|_U = f$, die ebenfalls Lipschitz-stetig ist.

BW : $m = n = 1$

Lineare Fortsetzung zwischen Randpunkten erhält Lipschitz

$m > 1, \quad n = 1$



$g_x(y) := f(x) - \|y-x\| \cdot L$ (ein Schottkegel)

$g_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $x \in U$

$\bar{f} := \sup_{x \in U} g_x$, $y \mapsto \sup_{x \in U} f_x(y)$.

Falls f die Lipschitz-Bedingung

$\| f(x_1) - f(x_2) \| \le L \, \| x_1 - x_2 \| \quad \forall x_1, x_2 \in U$

erfüllt, erfüllt $\bar{f}$ die gl. Bedingung $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$.

Allg. Fall m, n beliebig kann auf $n = 1$ zurückgeführt werden

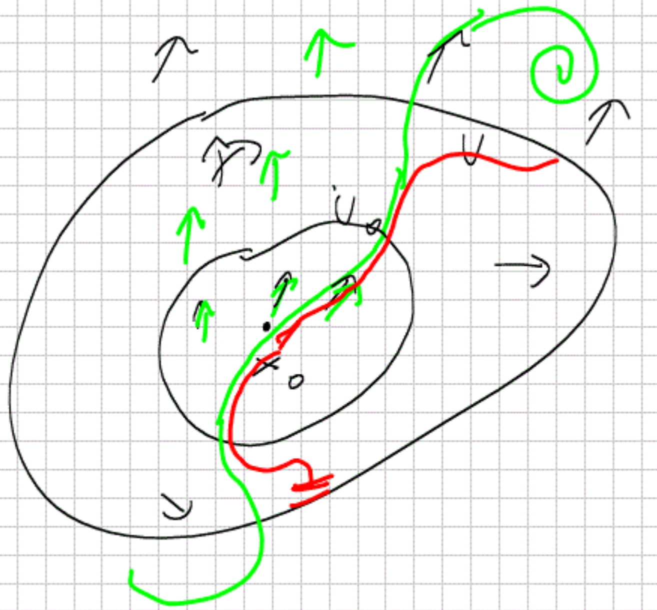
$f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ ist gdl

Lipschitz-stetig wenn $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

Lipschitz-stetig sind.

Für $x_0 \in U$ wählen wir U_0, sodaß $F|_{U_0}$ Lipschitz-stetig

Danach setzen wir $F|_{U_0}$ fort auf $\mathbb{R}^n$



grün = Lipschitz-stetige Fortsetzung

Solange man U_0 nicht verlässt, ist die Lösung eindeutig (und existiert).

Weitere Fragen: • Ist $f(1)$ stetig vom Anfangswert $f(0)$ abhängig?

• Wenn AWP von Parametern abhängt, ist Lösung stetig im Parameter?

BW - Idee von P-L: Menge der stetigen Fkten $T \to \mathbb{R}^n$.

Einführen des Operator $PL : C^0(T, \mathbb{R}^n) \to C^0(T, \mathbb{R}^n)$

$h \longmapsto u$, $h, u : T \to \mathbb{R}^n$

$$u(t) := v + \int_{t_0}^{t} F(s, h(s))\, ds$$

Lemma: f ist Lösung des AWPs für y:

$\forall t,\ y'(t) = F(t, y(t))$, $y(t_0) = v$

wenn $PL(f) = f$.

BW: Ann. f löst das AWP. $PL(f) = j$

$$j(t) = v + \int_{t_0}^{t} F(s, f(s))\, ds = v + \int_{t_0}^{t} f'(s)\, ds =$$

$$= v + f(t) - f(t_0) = f(t) \quad \rightsquigarrow j = f.$$

Ann: $j = f$:

Dann ist $f'(t) = F(t, f(t))$

$$f(t_0) = v + \int_{t_0}^{t_0} \sim \quad = v$$

Werden Banarndn FP verwenden