Nichtautonome lineare Diff-Gleichungen

Notiztitel 07.11.2016

1. Ordnung (vektorwertig) allg. Form

gegeben $n \in \mathbb{N}$, $T \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, nicht notwendigerweise beschränkt

$A : T \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig.

DG für $f : T \to \mathbb{R}^n$

$(*)$ $\forall t: f'(t) = A(t) \cdot f(t)$

$(**)$ $f(t_0) = v$ $\quad t_0 \in T$, $v \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

Satz: Das AWP $(*)$ & $(**)$ besitzt eine eindeutige Lösung.

Proposition: Es seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Es seien f_1, f_2 Lösungen des AWP mit

$f_1(t_0) = v_1$, $\quad f_2(t_0) = v_2$

Dann ist $f: t \mapsto f_1(t) + \lambda f_2(t)$

$(f = f_1 + \lambda f_2)$ Lösung des AWP mit AW

$f(t_0) = v_0 + \lambda v_1$.

Korollar: Die allgemeine Lösung von $(*)$ läßt sich mit Hilfe einer Matrix schreiben:

$f(t) = B(t) \cdot v$, wobei

$B: T \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine matrixwertige Lösungsfunktion ist.

Die Spalten von B sind die Lösungen von

$(*)$ mit AW: $f(t) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$

Eigenschaften von B:

$f'(t) = A(t)\cdot f(t)$

- $B'(t)\cdot v = A(t)\cdot B(t)\cdot v \rightsquigarrow B'(t) = A(t)\cdot B(t)$
- $B(t_0) = I_n$
- $\forall t \in T$ ist $B(t)$ invertierbar

Bw für $t = t_1$. ($B(t_1)$ invertierbar).

Neues AWP (*) $f'(t) = A(t) f(t)$

(**) $f(t_1) = w = B(t_1) v$

$$\underbrace{B_{\text{zweites AWP}}(t_0)}_{= B(t_1)^{-1}} (w) = v$$, gilt $\forall v \in \mathbb{R}^n$.

Leider nicht: $\cancel{B(t) = e^{A(t)}}$

(B) $A_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t & 1 \end{pmatrix}$. $B(t)$ erfüllt

$B'(t) = A(t)B(t) \; \forall t$

B existiert, stetig, beliebig oft diffbar, aber es gibt keinen geschlossenen Ausdruck.

skalare Systeme höherer Ordnung, allg. Form:

$k \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} : T \to \mathbb{R}$, $T \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall.

DG für $f: T \to \mathbb{R}$

$\forall t: \; f^{(k)}(t) = a_0(t)f(t) + a_1(t)f'(t) + \ldots + a_{k-1}(t)f^{(k-1)}(t).$

AWP: $f(t_0), f'(t_0), \quad , f^{(k-1)}(t_0)$ vorgegeben.

Hat immer genau 1 Lösung. (Kann auf 1 Ordnung zurückgeführt werden).

Wenn eine Lösung bekannt ist, die nirgends 0 wird, dann lässt sich die Ordnung reduzieren.

$k=2$: $\quad \forall t \cdot \quad f''(t) = a_0(t) f(t) + a_1(t) f'(t)$.

$h: I \to \mathbb{R}$ sei Lsg, $h(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$f(t) = y(t)\, h(t) \qquad y(t) = \frac{f(t)}{h(t)}$

 01/11/2017 09:45 AM

$$f'(t) = g'(t)\,h(t) + g(t)\,h'(t)$$

$$f''(t) = g''(t)\,h(t) + 2\,g'(t)h'(t) + g(t)\,h''(t)$$

RS der DG:

$$a_0(t)\,g(t)\,h(t) + a_1(t)\,g'(t)\,h(t) + a_2(t)\,g(t)\,h'(t)$$

g erfüllt die DG:

$$g''(t)\,h(t) + 2\,g'(t)\,h'(t) = a_1(t)\,g'(t)\,h(t) \quad **$$

denn $g(t)\,h''(t) = a_0(t)\,g(t)\,h(t) + a_1(t)\,g(t)\,h'(t)$,

weil h die DG erfüllt $\left(h'' = a_0 \cdot h + a_1 \cdot h'\right)$

$**$ ist eine DG 1. Ordnung für $g' : T \to \mathbb{R}$.

(3) $f''(t)\, t^2 = f'(t)\, t + 3 f(t) \quad \forall t \in T,$

$T = (0, \infty)$

$f(t) = t^3$ ist Lsg,

$f''(t) = 6t, \quad f'(t) = 3t^2,$

$6t \cdot t^2 = 3t^2 \cdot t + 3 t^3$ ✓

Ansatz: $f(t) = g(t) \cdot t^3$

$g''(t)\, t^3 + 2\, g'(t) \cdot 3t^2 = \frac{1}{t} \cdot g'(t)\, t^3$

$g''(t) \cdot t^3 + 6\, g'(t)\, t^2 = g'(t)\, t^2$

$g''(t) \cdot t + 5\, g'(t) = 0, \quad g''(t) = -\frac{5}{t} \cdot g'(t).$

DG, linear, 1. Ordnung, Lsg $y'(t) = C \cdot e^{\int -\frac{5}{t} dt} =$

$C\, e^{\log t^{-5}} = C \cdot t^{-5} = y'(t)$

$y(t) = c' t^{-4}$, 2te Lsg der ursp. Glg: $t^{-4} \cdot t^{3} = t^{-1}$.

Allg. Lsg: $f(t) = C_1 \cdot t^3 + C_2 \cdot t^{-1}$.

Probe: Setze $f(t) = t^{-1}$ in DG ein:

$f'(t) = -t^{-2}$

$f''(t) = 2\, t^{-3}$

$f''(t) \cdot t^2 \stackrel{?}{=} f'(t) \cdot t + 3 f(t)$

$2t^{-1} = -t^{-1} + 3t^{-1}$ ✓

Inhomogene lineare DG
(Variation der Konstanten).

1\. Ordnung: $n \in \mathbb{N}$, $T \subseteq \mathbb{R}$ Intervall, $t_0 \in T$

$A: T \to \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig

$b: T \to \mathbb{R}^n$ stetig

Gl. für $f: T \to \mathbb{R}^n$:

$$(*) \quad f'(t) = A(t) \cdot f(t) + b(t) \quad \forall t \in T.$$

Ann: Man kennt die allg Lösung von

$$(**) \quad f'(t) = A(t) f(t)$$

allg. Lsg $f(t) = B(t) \cdot f(t_0) = B(t) \cdot v$, $v \in \mathbb{R}^n$

Ansatz $w : T \to \mathbb{R}^n$, $f(t) = B(t)\, w(t)$.

Einsetzen in $(*)$:

LS $f'(t) = B'(t)\, w(t) + B(t)\, w'(t)$

RS $A(t) f(t) + b(t) = A(t) B(t)\, w(t) + b(t)$

$$\cancel{B'(t) w(t)} + B(t) w'(t) = \cancel{A(t) B(t) w(t)} + b(t)$$

$$w'(t) = \left(B(t)\right)^{-1} \cdot b(t).$$

$$w(t) = \int_{t_0}^{t} (B(s))^{-1} b(s)\, ds + \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{}{\underset{\cap}{C}}}$$

B

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ |t| \end{pmatrix}$$

Glg für $f: I \to \mathbb{R}^2$, $\quad f'(t) = A(t)f(t) + b(t)$.

Allg. Lsg der homogenen Gleichung

$$f(t) = e^{A(0)\cdot t} \cdot v = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}}_{B(t)} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Ansatz für inhomogene Gleichung:

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}$$

$$B(t)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \qquad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ |t| \end{pmatrix}$$

$$w'(t) = B^{-1}(t) \cdot b(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \, |t| \\ \cos t \, |t| \end{pmatrix}$$

$$w_1(t) = -\int_0^t \sin s \, |s| \, ds, \qquad w_2(t) = \int_0^t \cos(s) \, |s| \, ds.$$

Skalare DG höherer Ordnung:

(B) DG für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\forall t: \quad f''(t) + f(t) = |t|$$

Allg. Lösung der homogenen Gleichung:

$$f(t) = C_1 \cdot \cos(t) + C_2 \cdot \sin(t)$$

Ansatz für inhomogene Glg:

$$f(t) = c_1(t) \cdot \cos(t) + c_2(t) \sin(t)$$

$$f'(t) = -c_1(t)\sin(t) + c_2(t)\cos(t) + \underbrace{c_1'(t)\cos(t) + c_2'(t)\sin(t)}_{=0}$$

$$f''(t) = -c_1(t)\cos(t) - c_2(t)\sin(t) - c_1'(t)\sin(t) + c_2'(t)\cos(t)$$

$$f(t) + f''(t) = -c_1'(t)\sin(t) + c_2'(t)\cos(t) = |t|$$

2 lineare Gleichungen für c_1', c_2'

Lösen des 2 x 2 Systems: $c_1'(t) = \ldots$

$c_2'(t) = \ldots$

Integrieren, einsetzen in den Ansatz

$$f(t) = c_1(t)\cos(t) + c_2(t)\sin(t)$$

Variation der Konstanten

VdK ist ein Verfahren zur Lsg von inhomogenen linearen Diff-gleichungen, das voraussetzt, daß man die Lösung der homogenen Gleichung kennt.

Existenz und Eindeutigkeit des AWP

Folgendes AWP.

$T \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $t_0 \in T$

$n \in \mathbb{N}$, $F: T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig, $v \in \mathbb{R}^n$.

Gesucht $f: T \to \mathbb{R}^n$, mit

$\forall t \; f'(t) = F(t, f(t))$

$f(t_0) = v$.

Satz: Wenn die Funktion F Lipschitzstetig in der zweiten Variable ist, dann hat das AWP eine eindeutige Lösung.

Eine Funktion $y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-stetig,
wenn $\exists L \in \mathbb{R}$, sodaß $\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$:

$$\| y(v_1) - y(v_2) \| \leq L \cdot \| v_1 - v_2 \| .$$

$n = 1$.

$$y : x \longmapsto |x|$$

$||x_1| - |x_2|| \leq |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2$ y ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$.

$y : x \longmapsto x^2$ ist nicht Lipschitz-stetig.

Angenommen, indirekt: $\exists L : |x_1^2 - x_2^2| \leq L \cdot |x_1 - x_2| \; \forall x_1 x_2 \in \mathbb{R}$

$$|x_1 - x_2| |x_1 + x_2| \leq L \cdot |x_1 - x_2|$$

Da diese Ungleichung für alle x_1, x_2 gilt, muß sie auch für $x_1 = 2L$, $x_2 = 5L$ gelten.

$$3L \cdot 8L \leq L \cdot 3L \qquad | : L^2$$

$$24 \leq 3 \qquad \text{↯}.$$

$x \mapsto |x|^{\frac{1}{2}}$ Übung.

Wenn y differenzierbar ist und die Ableitung beschränkt ist, dann ist y Lipschitz-stetig Übung.

$\rightsquigarrow$ $x \mapsto \sin(x)$, $y \mapsto \cos(y)$ Lipschitzstetig.

