Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Notiztitel 25.10.2016

Gl.g. für $f: T \to \mathbb{R}^n$, $T = \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$

$\forall t: \quad f'(t) = A \cdot f(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben.

Folge $(f(0), f'(0), f''(0) \ldots)$, $s \mapsto f^{(s)}(0) = g(s)$

erfüllt die Rekursion für $g: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$,

$$g(s+1) = A \cdot g(s)$$

$\rightsquigarrow$ allg. Lsg $\quad g(s) = A^s \cdot g(0) = A^s \cdot f(0) \quad \forall s$

$$\left(= f^{(s)}(0) \right)$$

Taylor-Reihe für f:

$$f(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{A^s \cdot f(0)}{s!} \right) \cdot t^s = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{A^s \cdot t^s}{s!} f(0) \right)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^s t^s}{s!} \right)}_{e^{At} \,=\, \exp(At)} \cdot f(0)$$

Exponentialmatrix.

Die Reihe für $\exp(At)$ konvergiert für alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $t \in \mathbb{R}$.

Formeln/Beispiele für Exponentialmatrix:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A^s = \begin{pmatrix} \lambda_1^s & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^s \end{pmatrix}$$

$$e^{At} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{t^s}{s!} A^s = \sum_{s=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \frac{(t \cdot \lambda_1)^s}{s!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{(t \lambda_n)^s}{s!} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

(13) Nilpotente Matrizen.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & \ddots & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \ \ldots \ N^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}, \ N^n = 0$$

$$\exp^{tN} = \begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \exp(tJ) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & e^{\lambda t}\cdot t & \cdots & e^{\lambda t}\cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & e^{\lambda t}\cdot t \\ 0 & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$$

JNF:

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k \end{pmatrix},$$

wobei $J_1, \ldots, J_k$ Jordan-blöcke wie oben

$$e^{tJ} = \begin{pmatrix} e^{tJ_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{e^{tJ_k}} \end{pmatrix}$$

A beliebig: $A = T \cdot J T^{-1}$ für J JNF,

$$e^{tA} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A^s t^s}{s!} = \sum_{s=0}^{\infty} \left(T J^s \frac{t^s}{s!} \cdot T^{-1}\right) =$$

$$= T \left(\sum_{s=0}^{\infty} J^s \cdot \frac{t^s}{s!} \right) T^{-1} = T e^{tJ} \cdot T^{-1}.$$

Für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mit EW $\pm i$, $T = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ kann man obige Formel verwenden, oder auch die Potenzreihe direkt ausrechnen.

Es ergibt sich $e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ . . .

Satz: Es sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$; wir untersuchen die lineare Diffgl für $f : T \to \mathbb{R}^n$

$\forall t \; f'(t) = A\, f(t)$. Die folgenden sind equivalent.

(1) 0 ist stabiles Egl.

(2) $\{ e^{At} \mid t \geq 0 \}$ ist beschränkt.

(3) alle EW von A haben Realteil ≤ 0, der einzige EW mit Realteil 0 ist 0, und die zugehörigen Jordan-Blöcke sind 1×1 Matrizen

Satz 2: A wie oben; die folgenden sind equivalent:

(1) 0 ist asymptotisch stabiles Egl

(2) $\lim_{t \to \infty} e^{At} = 0$

(3) Alle Eigenwerte von A haben negativen Realteil.