Notiztitel 24.10.2016

Isomorphismus von Ringen:

$\mathcal{R} = \{ \varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \varphi$ ist durch eine lineare Rek. gegeben $\}$

$\mathbb{R}[x]$ .. Polynomring in einer Variablen.

char: $\mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ ist ein Ring-Isomorphismus.

(B): $id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \longmapsto 1$

$\sigma \longmapsto x$

$(f \mapsto (k \to f(k+1)))$

Wh: Wenn $\alpha, \beta \in R$ sodaß $char(\alpha), char(\beta)$ teilerfremd sind, dann ist

$$Ker(\alpha \circ \beta) = Ker(\alpha) \oplus Ker(\beta).$$

Annahme

$\alpha$ hat nur eine Nullstelle über $\mathbb{C}$

$$char(\alpha) = (x-\lambda)^k$$

Fall 1: $\lambda \neq 0$

Proposition: Wenn $\alpha$ wie oben definiert ist, dann bilden die Folgen $f_1, \ldots, f_k$, wobei $f_i : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $f_i(n) = \lambda^n \cdot n^{i-1}$, eine Basis für $Ker(\alpha)$.

BW: (1) $f_i \in \mathrm{Ker}(\alpha)$

(2) $f_i$ sind linear unabhängig

(3) $\dim(\mathrm{Ker}(\alpha)) = k$ (= Ordnung von $\alpha$).

Zu (3): Durch $k$ Anfangswerte $f(1), \dots, f(k)$ bzw. $f(0), \dots, f(k-1)$ ist die Lösungsfkt von $\alpha$ eindeutig festgelegt. $\mathrm{Ker}(\alpha) \cong \mathbb{C}^k$

$\alpha = (\sigma - \lambda \cdot id)^k$ $\qquad$ $\mathrm{char}(\alpha) = (x - \lambda)^k$

Berechnen $(\sigma - \lambda\, id) \cdot f_i = g$, $\quad f_i(n) = \lambda^n n^{i-1}$

$g(n) = f_i(n+1) - \lambda f_i(n) = \lambda^{n+1}(n+1)^{i-1} - \lambda \cdot \lambda^n \cdot n^{i-1} =$

$$= \lambda^{n+1} \cdot \left( (n+1)^{i-1} - n^{i-1} \right) = \lambda^{n+1} \Big( \underbrace{n^{i-2} \cdot \tbinom{i-1}{1} + n^{i-3} \tbinom{i-1}{2} \cdots}_{\text{Linearkombination von } f_1, \ldots, f_{i-1}.} \Big)$$

$(\sigma - \lambda\, id)(f_i)$ ist Linearkomb. von $f_1 \ldots f_{i-1}$

$(\sigma - \lambda\, id)(f_1) = 0$

$(\sigma - \lambda\, id)(f_2) = \lambda_1 \cdot f_1$ etc

$(\sigma - \lambda\, id)^k (f_i) = 0$ (1) gezeigt

Bem schon $(\sigma - \lambda\, id)^i (f_i) = 0$.

(2) $f_i$ sind linear unabhängig:

Angenommen, es gibt eine LK, die 0 ergibt:

$\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_k f_k = 0$

$\forall n: \lambda_1 \cdot \lambda^n + \lambda_2 \lambda^n \cdot n + \lambda_3 \lambda^n n^2 + \dots + \lambda_k \lambda^n n^{k-1} = 0$

$\cancel{\lambda^n} \left( \lambda_1 + \lambda_2 n + \lambda_3 n^2 + \dots + \lambda_k n^{k-1} \right) = 0$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n = 0$ $\square$

Fall 2: $\lambda = 0$. Hier sieht der Lösungsraum anders aus

$a: \sigma^k$ Ker $(\alpha)$ besteht aus allen Folgen $(f(n))_n$, für die $f(n) = 0 \ \forall n \geq k$.

Basis von $Ker(\alpha)$ ist

$$g_i(n) = \begin{cases} 1, \text{ falls } n = i-1 \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Die Basis in Propositionen ist $\mathbb{C}$-wertig, auch wenn der Operator $\alpha$ nur reelle Koeffizienten. Eine reelle Basis kann durch Linearkombinationen der komplexen Basis konstruiert werden.

B $\alpha = \sigma^3 - id \qquad ker(\alpha) = \{ f \mid f(n+3) - f(n) = 0 \ \forall n \}$

Lösungen von $\mathrm{char}(\alpha) \doteq x^3-1$

$$x^3-1 = (x-1)(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^2) \qquad \varepsilon = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f_1 = (n \mapsto 1^n = 1) \text{ konstante Folge} \qquad \varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f_2 = (n \mapsto \varepsilon^n) \\ f_3 = (n \mapsto \varepsilon^{2n}) \end{array}\right\} \text{ komplexe Lösungen}$$

NR:
$\varepsilon^2 = \varepsilon^{-1}$
$\varepsilon^{2n} = \varepsilon^{-n}$

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\varepsilon^{2n} = \cos\frac{2\pi n}{3} - i\sin\frac{2\pi n}{3} \qquad \varepsilon^n = \cos\frac{2\pi n}{3} + i\sin\frac{2\pi n}{3}.$$

$f_1, f_2, f_3$ ist komplexe Basis

$$\underset{g_1}{\underset{\|}{f_1}}, \quad \underset{g_2}{\underset{\|}{\frac{f_2+f_3}{2}}}, \quad \underset{g_3}{\underset{\|}{\frac{f_1-f_3}{2i}}} \quad \text{ist reelle Basis}$$

$$g_2(n) = \frac{\varepsilon^n + \varepsilon^{-n}}{2} = \cos\frac{2\pi n}{3}$$

$$g_3(n) = \frac{\varepsilon^n - \varepsilon^{-n}}{2i} = \sin\frac{2\pi n}{3}$$

Kontinuierliche linearen Systeme $T = \mathbb{R}$

(B) freie Schwingung., DG für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\forall t \; f''(t) + a \cdot f'(t) + b f(t) = 0 \qquad a \geq 0, \; b > 0$

char. Polynom $x^2 + ax + b$

$\mathcal{D}$ ... Ring der Differentialoperatoren $C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$,

wobei $C^\infty(\mathbb{R})$ die Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist.

$\mathcal{D}$ ist wieder ein Ring mit $+, \circ$

$\partial$. Ableitungs-Operator.

Jeder Operator $\alpha \in \mathcal{D}$ lässt sich darstellen als Linearkombination von Potenzen von $\partial$

$$\alpha : f \mapsto a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_k f^{(k)}$$

$$\alpha = a_0 \cdot \mathrm{id} + a_1 \partial + a_2 \partial^2 + \cdots + a_k \partial^k$$

$$\mathrm{char}(\alpha) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_k x^k$$

$\mathrm{char} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}[x]$ ist wieder ein Ring-Isomorphismus.

Zweiter Isomorphismus bildet Lösungsräume von linearen Rekursionen in L-Räume von DG ab.

Satz.

$\alpha : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$, $\quad$ char$(\alpha)$ = char$(\beta)$.

$\beta : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$

Dann ist für jedes $f \in \mathrm{Ker}(\alpha)$ die Folge der Ableitungen bei 0 : $n \mapsto f^{(n)}(0)$ eine im Kern von $\beta$.

Beweis: Zeigen für $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, daß

Folge der Ableitungen von $\partial(f)$ gleich dem Shift der Folgen der Ableitungen von $f$ ist.:

$$(\partial(f))^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0).$$

Für jedes $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ sei Taylor$(f)$ die Folge der Ableitungen bei $0$.

Taylor$(\partial f) = \sigma($Taylor$(f))$

Beh: Wenn $\alpha \in \mathcal{D}$, $\beta \in \mathcal{R}$, char$(\alpha)$ = char$(\beta)$, dann ist Taylor$(\alpha(f)) = \beta($Taylor$(f))$

BW der Behauptung:

Wenn die Behauptung für $\alpha_1, \alpha_2$ gilt dann gilt sie auch für $\alpha_1 + \alpha_2$, $\lambda\alpha_1$ $(\forall \lambda \in \mathbb{R})$,

$\alpha_1 \circ \alpha_2$.

Zeigen dies für $\alpha_1 \circ \alpha_2$: | $\beta_1, \beta_2$ GR mit gleichen char. Pol.

$$\mathrm{Taylor}((\alpha_1 \circ \alpha_2)(f)) = \mathrm{Taylor}(\alpha_1(\alpha_2(f))) = \beta_1(\mathrm{Taylor}(\alpha_2(f)))$$

$$= \beta_1(\beta_2(\mathrm{Taylor}(f))) = (\beta_1 \circ \beta_2)(\mathrm{Taylor}(f)).$$

Damit ist die Beh. für alle Diff.-operatoren gezeigt.

Folgerung: Es sei $\alpha \in \mathcal{D}$, $B \in R$ der entsprechende Rekursions-Operator. Dann findet man eine Basis für $\mathrm{Ker}(\alpha)$, indem man für eine Basis $f_1, \dots, f_k$ von $\mathbb{R}$ die Potenzreihen bildet:

$$y_i(t) = f_i(0) + \frac{f_i(1)}{1!} t + \frac{f_i(2)}{2!} t^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_i(n)}{n!} t^n$$

(Die Folge $\mathrm{Taylor}(y_i)$ ist dann genau $f_i$).

Wenn das char. Polynom nur 1fache Nullstellen hat:

$$f_i(n) = \lambda^n, \qquad y_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{\lambda t}.$$

Im allgemeinen Fall.

$$\mathrm{char}(\alpha) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_r)^{m_r},$$

wobei $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = k$

Basis für $\mathrm{Ker}(\alpha)$:

$$f_{i,j}(t) = e^{\lambda_i t} \cdot t^{j-1}, \quad i = 1, \ldots r, \quad j = 1, \ldots, m_i.$$

(funktioniert genauso für $\lambda = 0$).

Schwingungsgleichung:

$\mathrm{char}(\alpha) = x^2 + ax + b$

$$x_{1/2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{D}}{2},$$

$$D = a^2 - 4b$$

"Diskriminante"

$D > 0$: zwei reelle Nst $\lambda_1, \lambda_2$

allg. Lsg der Dg: $f(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

$D < 0$ zwei komplexe Lsgen $\lambda_1 = -\frac{a}{2} + i\frac{\sqrt{|D|}}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{a}{2} - i\frac{\sqrt{|D|}}{2}$

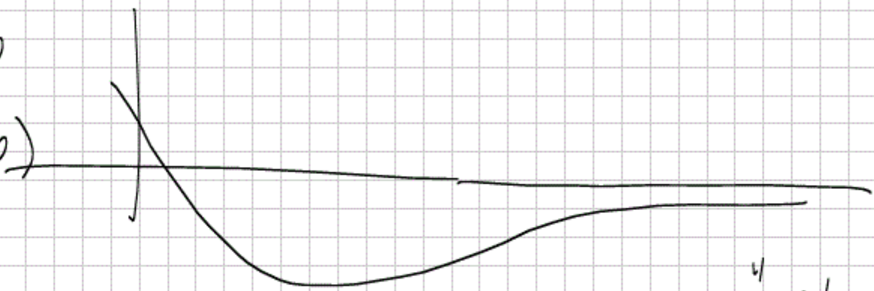
allg. Lsg der DG: $f(t) = c_1 \cdot e^{-\frac{a}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2} \cdot t\right) + c_2 e^{-\frac{a}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{|D|}}{2} t\right)$

$D = 0$ eine reelle Nullstelle $x_1 = -\frac{a}{2}$

allg. Lsg: $f(t) = C_1 e^{-\frac{a}{2}t} + C_2 e^{-\frac{a}{2}t} \cdot t$.

Lsg bei: $D > 0$

$(D = 0)$



"stark gedämpft"

$D < 0$