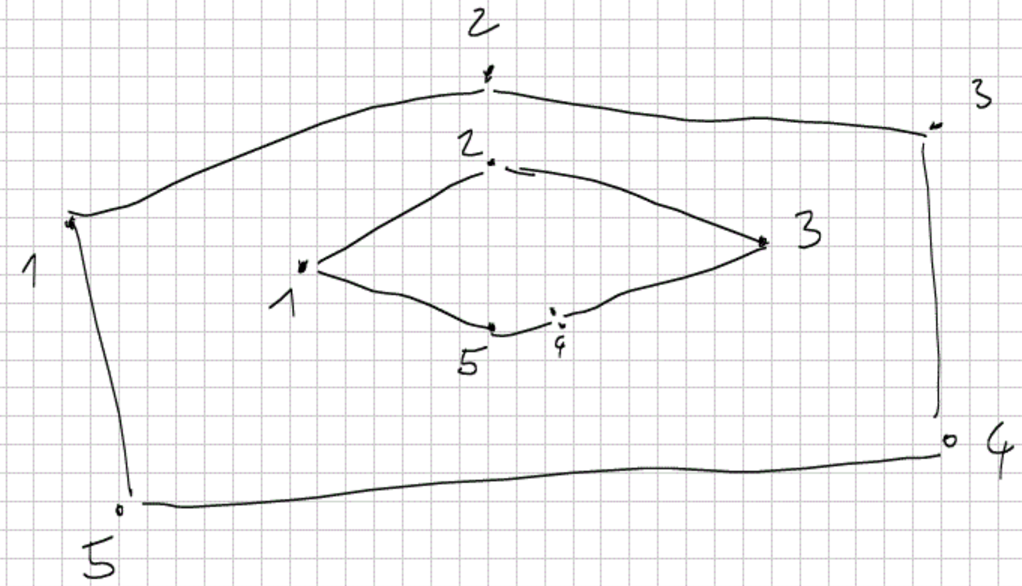
Lineare Rekursionen

Notiztitel 18.10.2016

B2 Fortsetzung:



$$f(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_5(t) \\ y_1(t) \\ \vdots \\ y_5(t) \end{pmatrix} \quad A \in \mathbb{R}^{10 \times 10} \quad B \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$$

$$f(t+1) = A \cdot f(t),$$

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{2}(S + S^{-1})$$

$S^5 = I$ EW von S: Nullstelle von $x^5 - 1$.

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i \sin\frac{2\pi}{5}$$

Nst von x^5-1: $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$

$$J(S) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \omega^3 & \\ & & & & \omega^4 \end{pmatrix}$$

Proposition: Wenn $A \sim B$ (ähnliche Matrizen), dann sind auch $A + A^{-1}$ und $B + B^{-1}$ ähnlich. (BW Übung)

$$S \sim J(S)$$

$$B \sim J(S) + J(S)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \frac{\omega+\omega^{-1}}{2} & & \\ & & \frac{\omega^2+\omega^{-2}}{2} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \frac{\omega^4+\omega^{-4}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \cos\frac{2\pi}{5} & & & \\ & & \cos\frac{4\pi}{5} & & \\ & & & \cos\frac{4\pi}{5} & \\ & & & & \cos\frac{2\pi}{5} \end{pmatrix}$$

$$\cos\frac{2\pi}{5} \sim 0{,}309$$

$$\cos\frac{4\pi}{5} \sim -0{,}809$$

EW von $A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$: $\quad 1 \quad$ Vielfachheit 2 ✓

$\cos \frac{2\pi}{5} \sim 0.309 \quad$ Vielfachheit 4 ✓

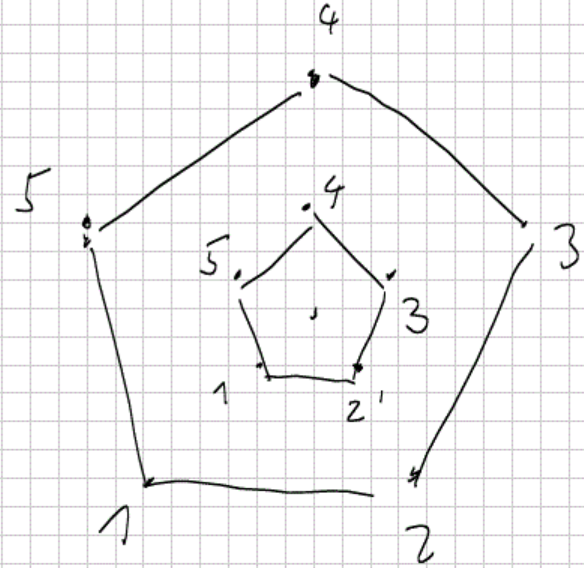
$\cos \frac{4\pi}{5} \sim -0.809 \quad$ Vielfachheit 4.

Eigenvektoren zu 1: $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \\ s \\ s \\ s \\ t \\ t \\ t \\ t \\ t \end{pmatrix}$ 2-dimensionaler Eigenraum.

regelmässiges 5-eck:

Eigenvektor zu

$\cos\frac{2\pi}{5} \sim 0.309$



$$\begin{pmatrix}\bar x_1\\ \bar x_2\\ \bar x_3\\ \bar x_4\\ \bar x_5\\ \bar y_1\\ \bar y_2\\ \bar y_3\\ \bar y_4\\ \bar y_5\end{pmatrix}$$

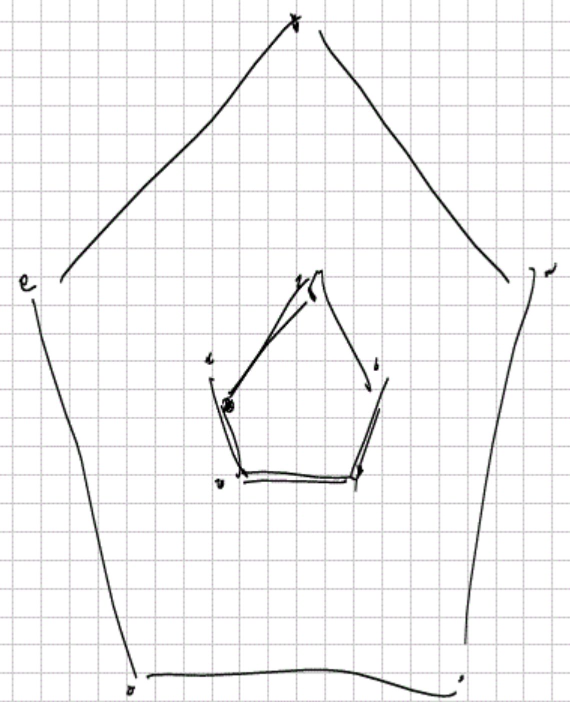
Koordinaten des 5ecks.

Es sei $C \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beliebig,

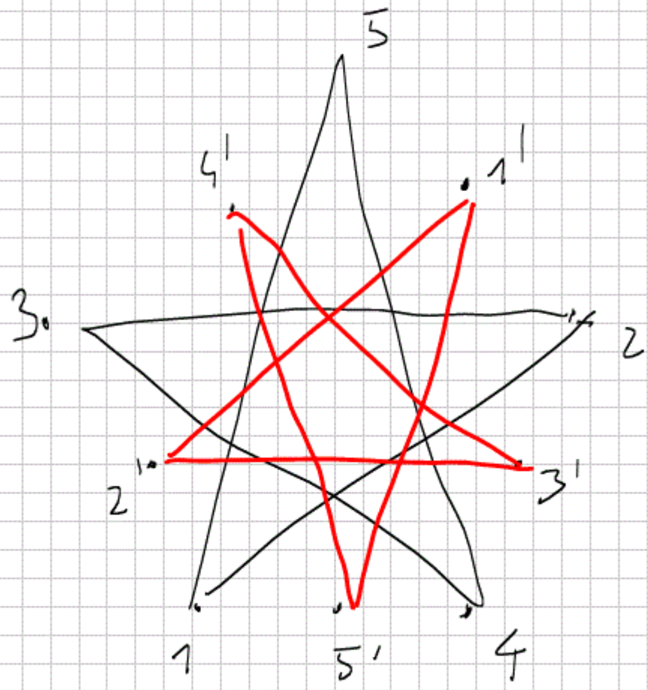
$$\begin{pmatrix}u_i\\ v_i\end{pmatrix} = C\begin{pmatrix}x_i\\ y_i\end{pmatrix} \text{ für } i=1..5,$$

$$\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_5\\ v_1\\ \vdots\\ v_5\end{pmatrix}$$ ist EV

ist wieder Eigenvektor zum gleichen Eigenwert



Anwendung von C
ist vertauschbar
mit Bildung von
Mittelpunkten.



Regelmässiges Pentagramm

Eigenraum zu −0.809 sind lineare Bilder dieses 5-zackigen Sterns.

Wie sehen Potenzen von JNFen aus?

Potenzen von Jordanblöcken?

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}. \quad B^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & n(n-1)\lambda^{n-2} & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & n\lambda^{n-1} \\ & & & \lambda^n \end{pmatrix}.$$

$n(n-1)\cdot(n-d)$
$\cdot\lambda^{n-d}$

Wichtig: λ^n in der Diagonale; n kommt vor.

Asymptotisches Verhalten von linearen Rekursionen:

Satz 1: Es sei $n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ - Matrix. Die lineare Rekursion für $f: T (= \mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben durch $f(t+1) = A \cdot f(t) \ \forall t$ hat bei $0 \in \mathbb{R}^n$ ein Egl. Dfsä:

(1) Egl ist asymptotisch stabil.

(2) $\lim_{t \to \infty} A^t = 0$

(3) Alle Eigenwerte von A haben Betrag < 1.

Satz 2: Voraussetzungen wie oben (A) D fs ä:

(1) Egl ist stabil.

(2) $\lim_{t \to \infty} A^t$ existiert.

(3) alle EW haben Betrag ≤ 1. Der einzige EW mit Betrag 1 ist 1, und alle zu 1 gehörenden Jordan-blöcke sind 1x1-Matrizen.

Beweis: (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Wenn alle EW Betrag < 1 haben, geht λ^t gegen 0 und zwar stärker als $\epsilon^{\text{irgendwas}}$ Daher ist $\lim_{t \to \infty} A^t = 0$.

Wenn irgendein EW λ Betrag ≥ 1 hat, geht der entsprechende EW von A^t sicher nicht gegen 0.
Daher kann auch A^t nicht gegen 0 gehen.
Wenn konv. ist die Folge, aber gegen GW $\neq 0$.
Nur dann wenn EW 1 ist.
Wenn ein J-Block größer als 1×1 ist, trotzdem Divergenz.
(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\square$.

(1) $\Leftarrow$ (2).

Nehmen (2) an. $\lim_{t\to\infty} A^t = 0$.

$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} A^t \cdot f(0) = 0$ unabhängig vom Anfangswert.

Wäre $\lim_{t\to\infty} A^t \neq 0$ oder nicht existent, dann

lässt sich ein AW $f(0)$ finden mit $\lim_{t\to\infty} A^t \cdot f(0) \neq 0$ oder nicht existent

Wenn $\lim_{t\to\infty} A^t = A_\infty$ ist, dann ist

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = A_\infty f(a)$$

Für $\varepsilon > 0$ lässt sich $\delta > 0$ finden, sodaß

$\| f(a) \| < \delta \implies \| A_\infty \cdot f(a) \| < \varepsilon$ $\rightsquigarrow$ Fgl. stabil

Umkehrung Übung.

Lineare Rekursion höherer Ordnung:

allg. Form: für $f: T \to \mathbb{R}$, $T = \mathbb{N}$.

$$f(t+k) = a_0 f(t) + a_1 f(t+1) + \quad + a_{k-1} f(t+k-1),$$

mit $a_0, a_1 \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$. fix

(B) Fibonacci-Rekursion $f(t+2) = f(t) + f(t+1)$

$(k=2, a_0 = a_1 = 1)$.

char. Polynom der Rekursion: in $\mathbb{R}[x]$

$$x^k - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \dots - a_{k-1} x^{k-1};$$

Werden zeigen, daß Lösungen aufgespannt werden von den Folgen $t \mapsto \lambda_i^t t^j$, λ_i Nullstellen des char. Polynoms, $j = 0, \dots,$ Vielfachheit der Nullstelle -1.

Anwendung auf Fibonacci-Rekursion:

$x^2 - 1 - x$ char. Polynom

Nullstellen: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$, $\frac{-\sqrt{5}+1}{2}$

$\sim 1{,}6$ $\sim 0{,}6$

Allg. Lsg: $t \longmapsto c_1 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^t + c_2 \left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^t$

"goldener Schnitt".

$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .... Menge aller Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$\mathcal{R}$ ..... Menge aller Operatoren $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,

die sich als lineare Rekursion schreiben lassen.

$$f : t \mapsto f(t)$$

$$\Big\downarrow \ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$t \longmapsto \alpha_0 f(t) + \alpha_1 f(t+1) + \dots + \alpha_k f(t+k)$$

Beispiele: $id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in \mathcal{R}$, $\quad f \mapsto f$

"Shift-Operator" $\sigma \in \mathcal{R} \quad f \longmapsto (t \mapsto f(t+1))$

Wenn $\alpha \in R$ und $c \in \mathbb{R}$, dann ist $c\alpha \in \mathbb{R}$.

Wenn $\alpha, \beta \in R$, dann ist $\alpha + \beta$ ein Operator.

B $\sigma + id_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} : f \mapsto (t \mapsto f(t) + f(t+1))$

B „Fibonacci-Operator":

$$f \mapsto (t \mapsto f(t+2) - f(t+1) - f(t))$$

Dieser Operator ist gleich $\sigma \circ \sigma - \sigma - id$.

Allgemein läßt sich jeder Operator in R darstellen als Ausdruck in σ, Skalarmultiplikation,

Addition von Operatoren

$$\alpha = a_0 \cdot id + a_1 \sigma + a_2 \sigma \circ \sigma + \dots + a_k \underbrace{\sigma \circ \sigma \dots \circ \sigma}_{k \text{ mal}}$$

σ^k

Def: Wenn $\alpha \in \mathbb{R}$ wie oben,

bezeichnen wir mit $char(\alpha) \in \mathbb{R}[x]$,

$$char(\alpha) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \dots + a_k x^k$$

das charakteristische Polynom des Operators.

Proposition: $\mathrm{char}(\alpha \circ \beta) = \mathrm{char}(\alpha) \cdot \mathrm{char}(\beta)$.

B

$$\mathrm{char}(\sigma) = x$$

$$\mathrm{char}(id) = 1$$

$$\mathrm{char}(fib) = x^2 - x - 1$$

$$\mathrm{char}(fib \circ \sigma) = (x^2 - x - 1) \cdot x = x^3 - x^2 - x$$

$$(t \mapsto f(t)) \xmapsto{\sigma} (t \mapsto f(t+1)) \xmapsto{fib} (t \mapsto f(t+3) - f(t+2) - f(t+1)).$$

BW der Proposition:

Für $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$: $(\alpha+\beta)\circ\gamma = \alpha\circ\gamma + \beta\circ\gamma$

$\alpha\circ(\beta+\gamma) = \alpha\circ\beta + \alpha\circ\gamma$

Für $c \in \mathbb{R}$: $(c\alpha)\circ\beta = c\cdot(\alpha\circ\beta)$

$\alpha\circ(c\beta) = c\,(\alpha\circ\beta)$.

$$\alpha = a_0\,\mathrm{id} + a_1\sigma + \dots + a_m\sigma^m$$

$$\beta = b_0\,\mathrm{id} + b_1\sigma + \dots + b_n\sigma^n$$

$$\alpha\circ\beta = a_0b_0\,\mathrm{id} + (a_1b_0 + a_0b_1)\sigma + \quad +$$

Wende chen an, Vergleich mit Multiplikation in $\mathbb{R}[x]$. $\square$

Korollar: Operatoren aus $\mathcal{R}$ sind vertauschbar,
dh $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

$\mathrm{char}: \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}[x]$

$\mathrm{char}^{-1}: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathcal{R}$

$$\alpha \circ \beta = \mathrm{char}^{-1}(\mathrm{char}(\alpha \circ \beta)) =$$
$$\mathrm{char}^{-1}(\mathrm{char}(\alpha) \cdot \mathrm{char}(\beta)) = \mathrm{char}^{-1}(\mathrm{char}(\beta) \cdot \mathrm{char}(\alpha))$$
$$= \mathrm{char}^{-1}(\mathrm{char}(\beta \circ \alpha)) = \beta \circ \alpha.$$

Satz aus der Polynom-Arithmetik: $\forall p, q \in \mathbb{R}[x]$

Wenn $ggT(p, q) = 1$ ist, dann existieren $a, b \in \mathbb{R}[x]$

sodaß $a \cdot p + b \cdot q = 1$.

Satz: Es seien $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$ sodaß $char(\alpha), char(\beta)$ teilerfremd sind.

Dann ist $Ker(\alpha \circ \beta) = Ker(\alpha) \oplus Ker(\beta)$.

Bem: Der Kern von α ist genau der Vektorraum aller Lösungen der Rekursion $\alpha \cdot (f) = 0$.

BW des Satzes: $a := \text{char}\,\alpha$, $b = \text{char}(\beta)$.

$\exists u, v \in \mathbb{R}[x]$: $u a + v \cdot b = 1$. (*)

$\mu := \text{char}^{-1}(u)$, $\nu := \text{char}^{-1}(v)$ Rek-Operatoren.

Aus (*) wird durch Anwendung von char^{-1}:

$$\mu \circ \alpha + \nu \circ \beta = id.$$

Es sei $f \in \ker(\alpha \circ \beta) = \ker(\beta \circ \alpha)$

Müssen zeigen, dass $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in \ker(\alpha)$, $f_2 \in \ker(\beta)$

$id(f) = (\mu \circ \alpha)(f) + (\nu \circ \beta)(f)$

$f_2 \qquad f_1$

$\alpha(f_1) = (\alpha \circ \nu \circ \beta)(f) = (\nu \circ \alpha \circ \beta)(f) = \nu((\alpha \circ \beta)(f)) = 0.$

$\beta(f_2) = 0$ analog.

Um die Direktheit der Summe zu zeigen, zeigen wir äquivalent dazu, daß $\operatorname{Ker} \alpha \cap \operatorname{Ker} \beta = 0$.

$y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \quad \alpha(y) = \beta(y) = 0$

$\mu \circ \alpha + \nu \circ \beta = id$ auf y anwenden

$\mu(\alpha(y)) + \nu(\beta(y)) = y$

$0 + 0 = y, \quad y = 0$ $\square$.