Partialbruchzerlegung

Notiztitel 17.10.2016

Gegeben: rationale Fkt $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{R}[t]$ Polynome.

Gesucht Darstellung $\frac{a}{b} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{1}{(t-\alpha_i)^j} + \sum_k b_k t^k$

Wdh Analysis:

Polynomdivision: $a = b \cdot q + r$, $r, q \in \mathbb{R}[t]$, $\deg(r) < \deg(b)$

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

In $\mathbb{C}[t]$ lässt sich b faktorisieren: $b = \prod_{i=1}^{k} (t-\alpha_i)^{m_i}$,

$m_1 + m_2 + \ldots + m_k = \deg(b)$.

Beweis, daß eine Lösung existiert:

Induktion nach k (Anzahl der Nst von b).

$k=1$ $\qquad \alpha_1 = 0. \qquad b = t^n$

$\frac{a}{b} = \frac{a}{t^n}$ läßt sich darstellen durch LK von t^i, t^{-i}

i läuft von 1 bis n

$\alpha_1 \neq 0$: Verschiebung auf t-Achse

$t = \bar{t} + \alpha_1 \qquad t - \alpha_1 = \bar{t}$

führt auf $\alpha_1 = 0$ zurück.

$k > 1$: Zerlege $b = b_1 \cdot b_2$ * $\quad ggt(b_1, b_2) = 1$.

Es existieren c_1, c_2 sodaß $c_1 \cdot b_1 + c_2 \cdot b_2 = 1$

$$\rightsquigarrow \quad a \cdot c_1 \cdot b_1 + a \cdot c_2 \cdot b_2 = a \quad | : b$$

* da $b_1, b_2 > 0$

$$\frac{a \cdot c_1 \cdot \cancel{b_1}}{\cancel{b_1} b_2} + \frac{a \cdot c_2 \cdot \cancel{b_2}}{b_1 \cancel{b_2}} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{a \cdot c_1}{b_2} + \frac{a \cdot c_2}{b_1} = \frac{a}{b}$$

$\rightsquigarrow$ besitzen PBZ nach Ind hypothese $\square$

(B) Berechne Stammfunktion von $t \mapsto \frac{1}{t^2+1}$

Polynomdivision nicht notwendig, $\deg(1) < \deg(t^2+1)$

$0 < 2$

$$(t^2+1) = (t+i)(t-i)$$

$$\frac{1}{t^2+1} = \frac{x}{t+i} + \frac{y}{t-i} \quad \Big| \cdot (t^2+1)$$

$$1 = x(t-i) + y(t+i)$$

I: $t = i$: $\quad 1 = y \cdot 2i$ $\quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}$

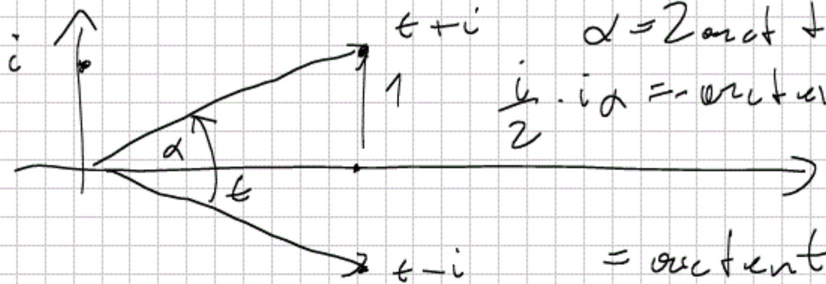
II: $t = -i$: $\quad 1 = x \cdot (-2i)$ $\qquad y = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$

$$\frac{1}{t^2+1} = \frac{i}{2}\,\frac{1}{t+i} - \frac{i}{2}\,\frac{1}{t-i}$$

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt = \frac{i}{2}\log(t+i) - \frac{i}{2}\log(t-i) + C =$$

(Komplexe Def. des log. Wert $a+bi$, $b \in [-\pi, \pi]$)

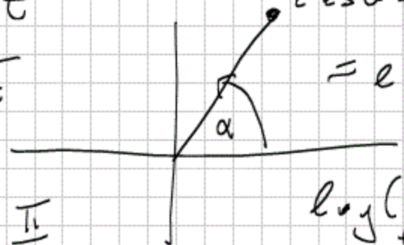
$$= \frac{i}{2}\left(\log(t+i) - \log(t-i)\right) = \frac{i}{2}\cdot\log\left(\frac{t+i}{t-i}\right)$$



$\alpha = 2\arctan\frac{1}{t}$

$\frac{i}{2}\cdot i\alpha = -\arctan\frac{1}{t}$

$= \arctan t + \frac{\pi}{2}$



$= e^{i\alpha}$

$\log\left(\frac{t+i}{t-i}\right) = i\alpha$

Airy-Differentialgleichung: für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f''(t) = t \cdot f(t)$$

lässt sich nicht auf ein Integrationsproblem zurückführen.

Manchmal lässt sich eine DG zurückführen auf TdV:

Gleichung für $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad (I = \mathbb{R})$

$$\forall t: f''(t) = F(f(t), f'(t))$$

Suchen y sodaß $\forall t: \quad f'(t) = y(f(t))$

$$f''(t) = y'(f(t)) \cdot f'(t) = F(f(t), f'(t))$$

$$y'(f(t)) \cdot y(f(t)) = F(f(t), y(f(t)))$$

$f(t) = s$

$$y'(s) \cdot y(s) = F(s, y(s))$$

$$y'(s) = \frac{1}{y(s)} \cdot F(s, y(s))$$

wenn man Glück hat, lassen sich hier Variablen trennen

$$= G(s) \cdot H(y(s)).$$

Lineare DG / Rekursionen mit konstanten Koeffizienten

Rekursion Ordnung 1, skalar. für $f: T \to \mathbb{R}$, $T = \mathbb{N}$, inkl. 0.

$\forall t.\ f(t+1) = a\, f(t)$, $a \in \mathbb{R}$ fix.

$f(t) = f(0) \cdot a^t \quad \forall t \in \mathbb{N}$ geom. Folge.

Wenn $|a| < 1$: $\lim_{t \to \infty} f(t) = 0$

Wenn $|a| > 1$ $\lim_{t \to \infty} f(t)$ existiert nicht.

$a = 1$ Folge konstant, konvergiert. $a = -1$: divergent.

Vektorwertig: $f: T \to \mathbb{R}^n$ n fix

$(*)$ $\forall t: \ f(t+1) = A \cdot f(t)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ fix

$\forall t: \ f(t) = A^t \cdot f(0)$.

Vektorraum aller Lösungen von $(*)$ ist isomorph zu $\mathbb{R}^n$, hat Dimension n.

Jordan-Zerlegung: $A = T \cdot J \cdot T^{-1}$

J ist Blockdiagonalmatrix, Blöcke $J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$

λ_i Eigenwerte

asymptotisches Verhalten:

$$f(t) = A^t \cdot f(0) = T \cdot J^t T^{-1} f(0)$$

Wenn alle EW λ_i Betrag kleiner 1 haben,
dann ist $\lim_{t \to \infty} J^t = 0$

Falls mind. ein λ_i Betrag > 1 hat, divergiert $\lim_{t \to \infty} J^t$
für bestimmte Startwerte $f(0)$ divergiert auch die Folge f.

$a, s : T \to \mathbb{R}$

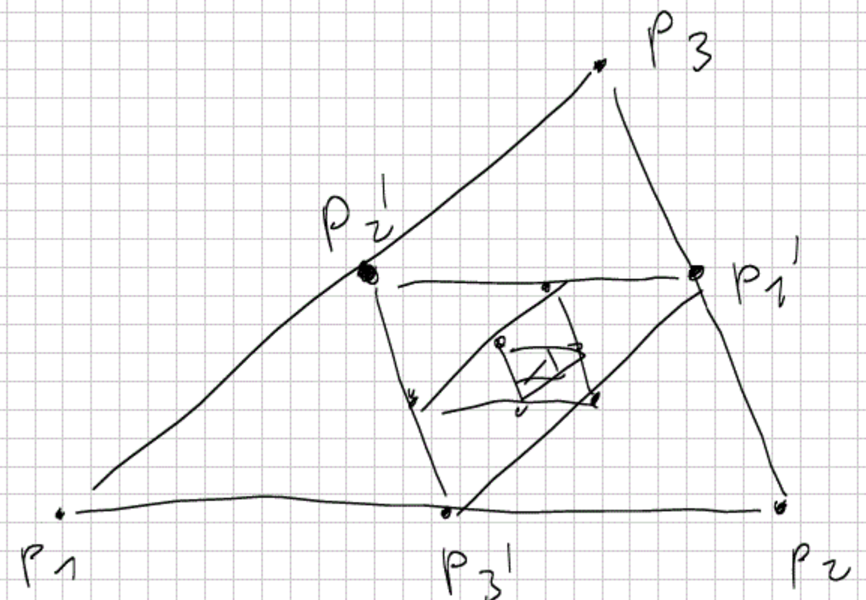
$\forall t:\ a(t+1) = a(t)\cdot q\ ,\qquad s(t+1) = s(t) + a(t)\ ,$

$s(t) = a(0) + a(1) + \dots + a(t-1)$ (geom Reihe).

$$f(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ s(t) \end{pmatrix} \qquad f(t+1) = \begin{pmatrix} q\cdot a(t) \\ a(t) + s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot f(t) .$$

Geom. Reihe läßt sich auf lin. Rekursion zurückführen

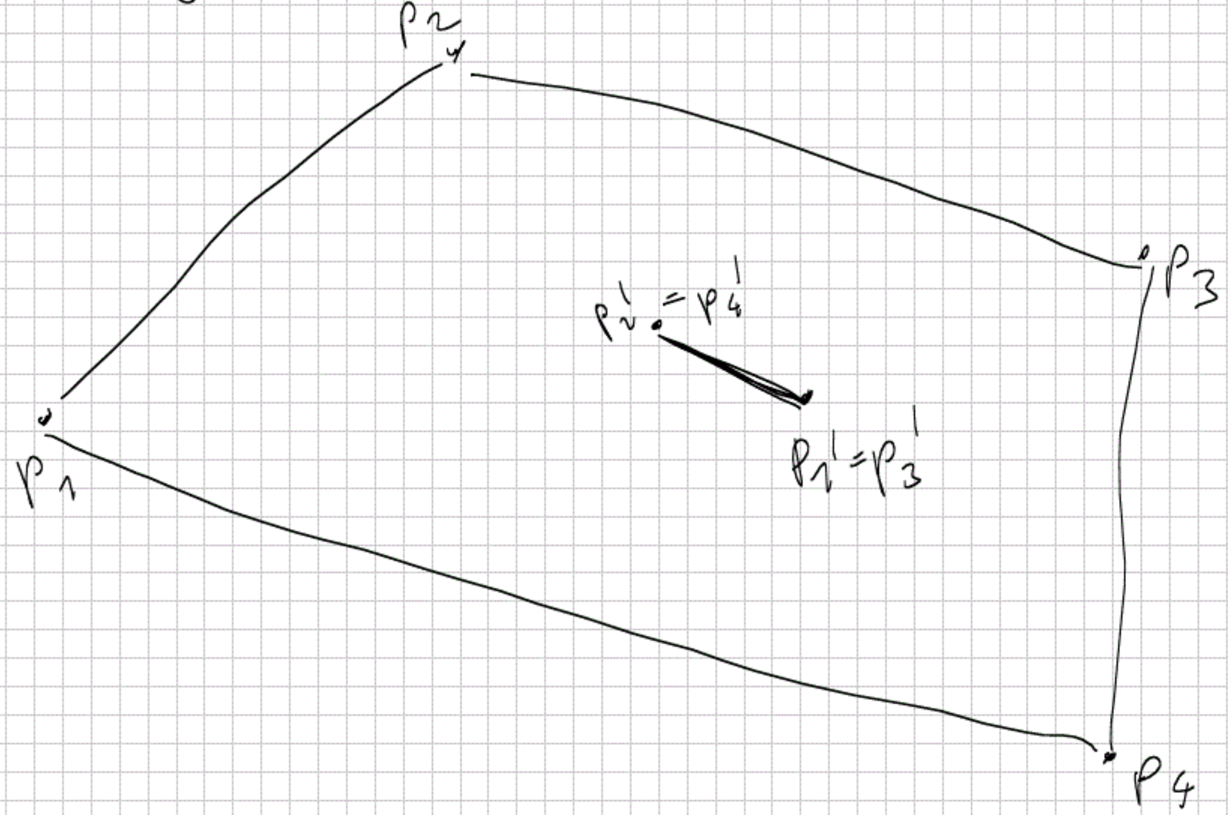
B2 3 Punkte in $\mathbb{R}^2$



Folge konvergiert.

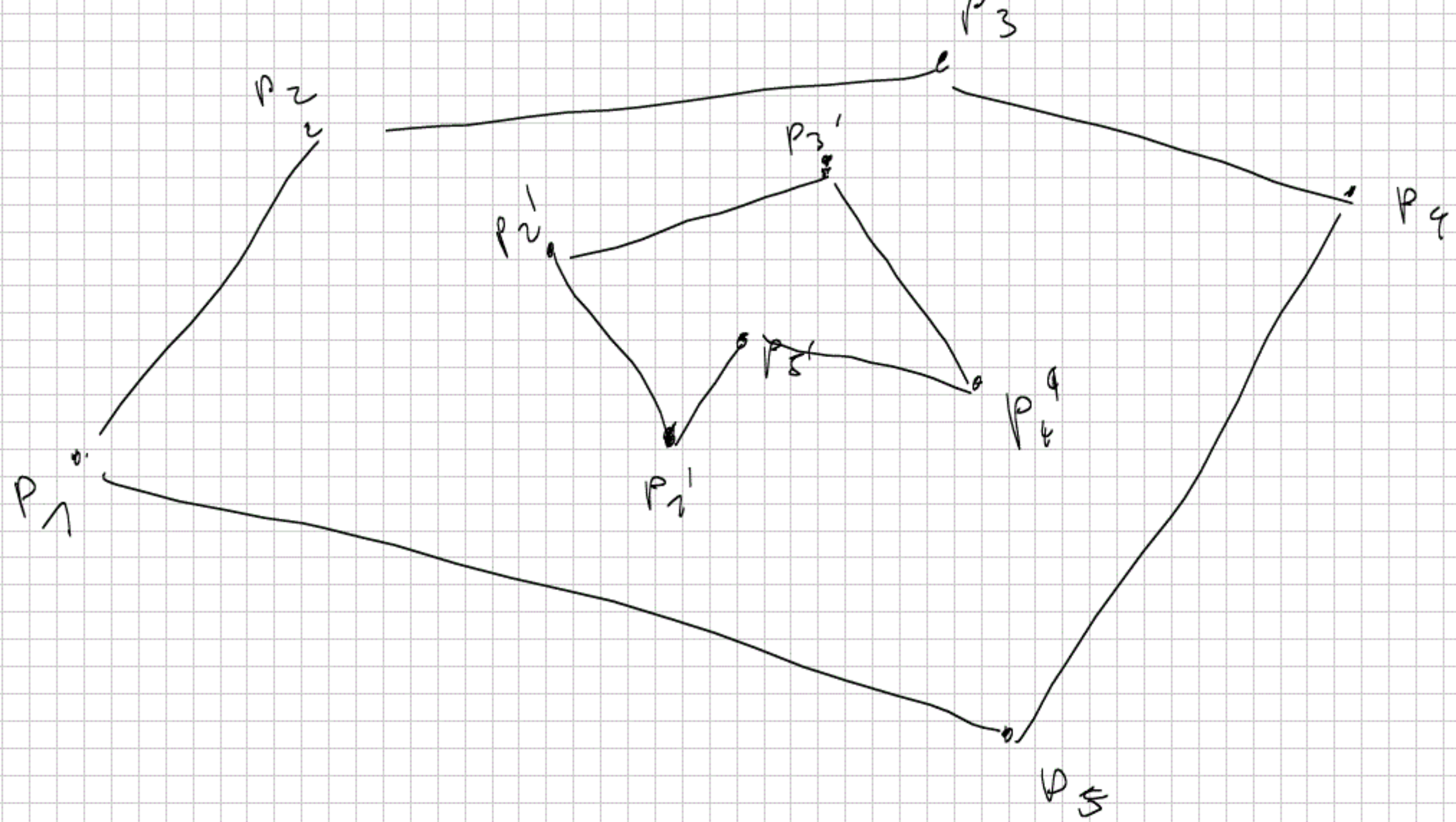
Dreiecke sind zueinander ähnlich.

Das gleiche mit 4 Punkten:



Folge ist ab dem zweiten konstant!

Das gleiche mit 5 Punkten:



Rechnung $(n=3)$:

$$f(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}, \quad f(t+1) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ \vdots \\ y_3(t) \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$: höchstens 2 EW $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & -\frac{1}{2} & \\ 0 & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Eigenvektor zum EW +1: x-Koordinate des Schwerpunktes

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \\ x_s \\ y_s \\ y_s \\ y_s \end{pmatrix}^t, \quad \text{wobei } \begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} \text{ der Schwerpunkt}$$

des Dreiecks $f(0)$ ist.

Unter der Annahme, dass $\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = 0$ ist, erhält sich das System mit der 2-te Jordan-Block: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \\ & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Multiplikation mit $-\frac{1}{2}$. (verkleinern & umdrehen).

$n = 4$

$$f(t+1) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

EW von B:

$0, 1$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

$J = J^2 = J^3 = J^4 \ldots$

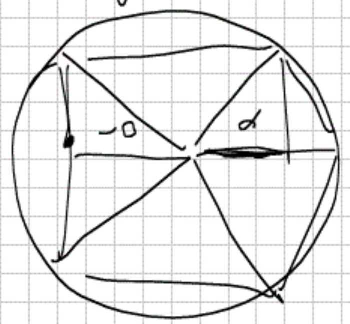
$B = B^2 = B^3 = B^4 \ldots$ Folge ist ab dem 1. Schritt konstant

$n = 5$. $\quad f(t+1) = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} f(t)$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Da B symmetrisch, sind alle Eigenwerte reell.

B hat 3 Eigenwerte: 1, $\underbrace{\cos\frac{\pi}{5}}_{\alpha}$, $\underbrace{\cos\frac{2\pi}{5}}_{\beta}$



$$J = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \alpha & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \beta & \\ & & & & \beta \end{pmatrix}, \quad |\alpha|, |\beta| < 1, \quad |\beta| > |\alpha|, \ \beta < 0.$$