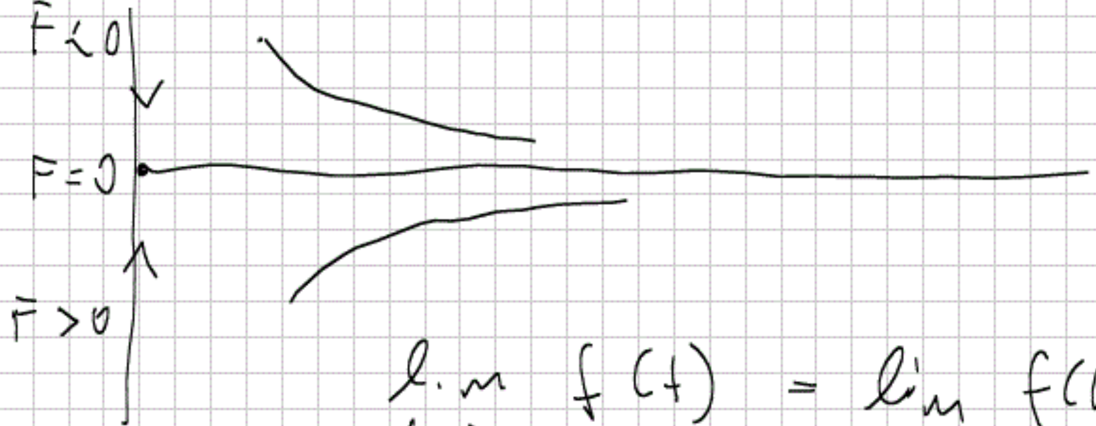
Notiztitel 11.10.2016

Nachtrag von gestern:

Glg für $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad (I = \mathbb{R})$

$f'(t) = F(f(t))$, wobei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig & fix.



$f(1), f(2), \ldots$

monoton

beschränkt → Grenzwert.

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{\substack{k \to \infty \\ k \in \mathbb{N}}} f(k)$$

Es sei $a := \lim_{t \to \infty} f(t)$.

$\forall t: \; f'(t) = F(f(t))$ $\quad t \to \infty$:

$$\lim_{t \to \infty} f'(t) = \lim_{t \to \infty} F(f(t)) = F(a)$$

Wäre $a > 0$, würde sich f einer Geraden mit positiver Steigung nähern. Analog für $a < 0$.

Daher gilt $a = 0$

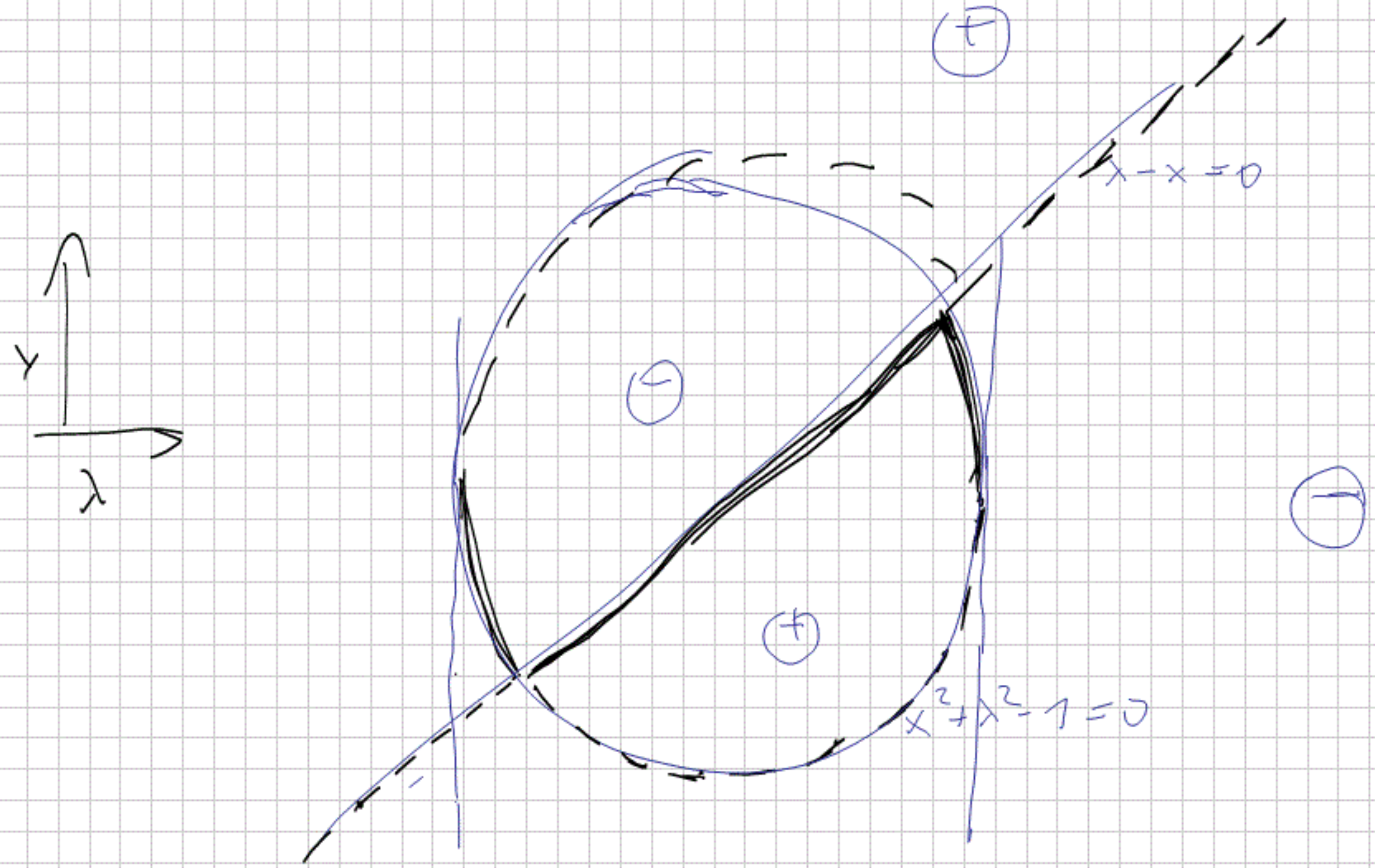
Wie zeichnet man ein Bifurkationsdiagramm?

(skalarer Fall)

Gilt für $f: T \to \mathbb{R}$

$\forall t: \quad f'(t) = F(f(t), \lambda)$, wobei $F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig

B) $F(x, \lambda) := (x^2 + \lambda^2 - 1)(\lambda - x)$


y
λ
+
−
−
+
λ − x = 0
x² + λ² − 1 = 0

Lösungsverfahren

(skalare autonome DG 1. Ordnung).

stetige Funktion $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Glg für $f: T \to \mathbb{R}$:

$f'(t) = F(f(t)) \quad \forall t \in T$.

$x_0 \in T (= \mathbb{R})$, $f(x_0) := y_0$, $F(y_0) \neq 0$.

In einer ε-Umgebung von x_0 ist $F \neq 0$.

Falls $f: T \to X$ existiert mit $f(x_0) = y_0$

Dann ist $f'(x_0) = F(f(x_0)) = F(y_0) \neq 0$.

Daher ist f in der Nähe von x_0 invertierbar.

$g = f^{-1}$ lokale Umkehrfunktion $g(y_0) = x_0$

$g \circ f = id$ (in der Nähe von x_0)

$(g \circ f)'(t) = g'(f(t)) \cdot f'(x_0) = 1$ $\forall t$ nahe bei x_0

Wegen DG. $g'(\underbrace{f(t)}_{s}) \cdot F(\underbrace{f(t)}_{s}) = 1$

$g'(s) \cdot F(s) = 1$ $\forall s$ nahe bei y_0

$g'(s) = \frac{1}{F(s)}$. $g(s) = \int_{\cancel{x_0}}^{s} \frac{1}{F(u)} du + C$

$$g(s) = \int_{y_0}^{s} \frac{1}{F(u)}\, du$$

f finden wir durch Invertieren von g.

B1 $\quad F(x) = 3 \cdot x^{\frac{2}{3}} \qquad$ ges: $f'(t) = F(f(t)) \ \forall t$

Stammfunktion von $\frac{1}{F}$:

$$\frac{1}{F(x)} = \frac{1}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}}$$

$$g(x) = \cancel{\tfrac{1}{3}} \cdot \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{\cancel{\tfrac{1}{3}}} + C = x^{\frac{1}{3}} + C$$

$$g(x) = x^{\frac{1}{3}} + C \qquad f = g^{-1}.$$

$$x^{\frac{1}{3}} + C = t$$

$$x = (t-c)^3 = f(t)$$

B2 $\quad F(x) = x^2$

$$f'(t) = (f(t))^2 \qquad f(t) = 0 \text{ konstante Lsg.}$$

Stammfunktion von $\frac{1}{F}$:

$$g(x) = -\frac{1}{x} + C$$

g^{-1} berechnen.

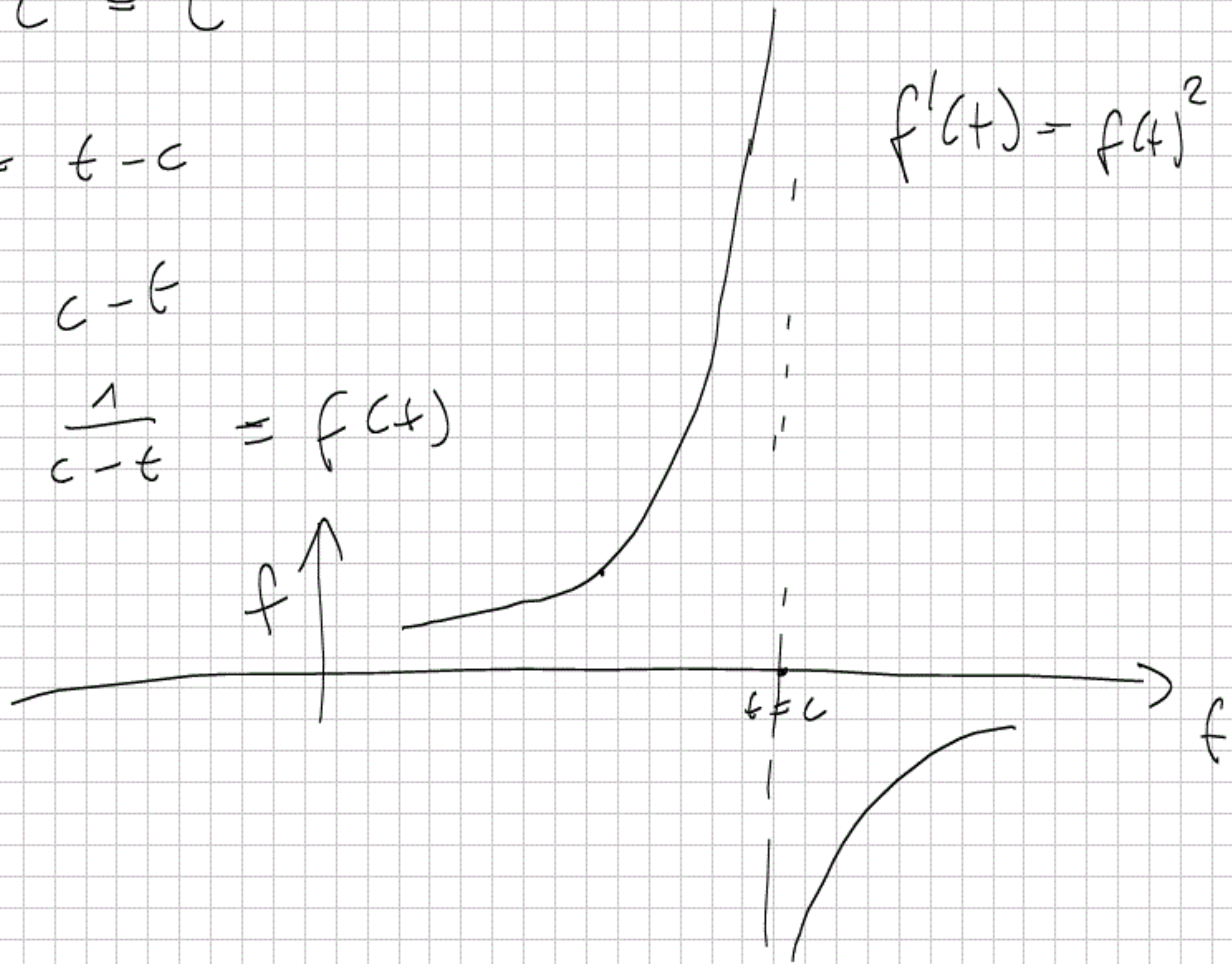
$$-\frac{1}{x}+C=t$$

$$-\frac{1}{x}=t-c$$

$$\frac{1}{x}=c-t$$

$$x=\frac{1}{c-t}=f(t)$$

$$f'(t)=f(t)^2$$



Trennung der Variablen:

für nicht-autonome skalare DG 1. Ordnung.

Ggs. für $f : T \to \mathbb{R}$

$$f'(t) = F(f(t)) \cdot G(t), \quad \forall t \in T$$

wobei $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig & gegeben.

Wenn a Nullstelle von F ist, dann ist

$f(t) = a$ eine (konstante) Lösung.

g Stammfunktion von $\frac{1}{F}$ (in der Nähe eines Wertes y_0, wo $F(y_0) \neq 0$)

$$g'(x) = \frac{1}{F(x)}$$

$$(g\circ f)'(t) = g'(f(t))\cdot f'(t)$$

$$= \frac{1}{F(\cancel{f}(t))}\cdot F(\cancel{f}(t))\cdot G(t) = G(t)$$

$g\circ f = h$, h eine Stammfunktion von G ist.

$f = g^{-1}\circ h$. löst die DG.

"Eselsbrücke" zur schnellen Durchführung des Verfahrens:

$$\forall t: f'(t) = F(f(t)) \cdot G(t)$$

$$\frac{df}{dt} = \cancel{f'(t)} = F(f) \cdot G(t) \qquad \Big| \cdot dt \; / F(f)$$

$$\frac{1}{F(f)} \cdot df = G(t) \cdot dt \qquad \Big| \int$$

$$\int \frac{1}{F(f)} \, df = \int G(t) \, dt$$

$$g(f(t)) = h(t) \; , \quad f(t) = g^{-1}(h(t))$$

(B) $f'(t) = \frac{-t}{f(t)}$ $\qquad \left(F(x) = \frac{1}{x}, \quad G(y) = -y \right)$

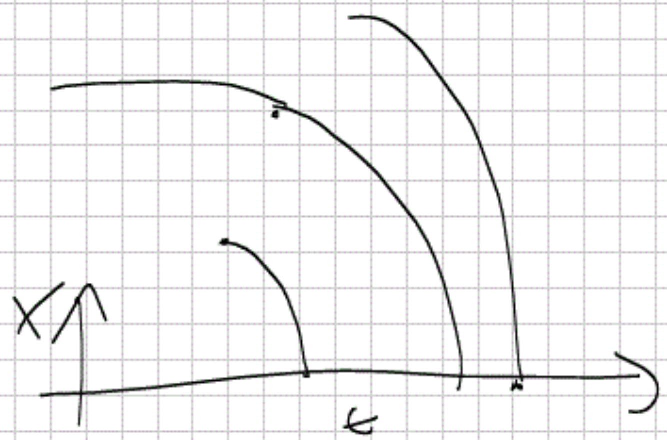
$\frac{df}{dt} = \frac{-t}{f} \quad \Big| \cdot f \cdot dt$

$f\, df = -t \cdot dt \quad \Big| \int$

$\frac{f^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + C$

$f^2 = -t^2 + 2C$

$f = \sqrt{-t^2 + 2C}$



Nicht-autonome lineare DG 1 Ordnung:

Glg für f:

$$f'(t) = F(f(t), t) \quad , \quad F: \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

erfüllt $F(x_1+x_2, t) = F(x_1, t) + F(x_2, t)$

$F(c\cdot x_1, t) = c\cdot F(x_1, t)$.

$$\rightsquigarrow \quad F(x, t) = a(t)\cdot x \quad , \text{ mit } a: \mathbb{R}\to\mathbb{R} \text{ stetig}$$

$$f'(t) = a(t)\cdot f(t) \quad \forall t$$

Lösung: DG: $f'(t) = a(t) \cdot f(t) \quad \forall t$

$F(x) = x, \quad G(y) = a(y)$

$t \mapsto \log(f(t))$ ist Stammfunktion von a

$$\int_{t_0}^{t} a(u)\,du + C$$

$$\boxed{f(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(u)\,du + C}}$$

$$e^{A(t)+C} = e^{A(t)} \cdot \underbrace{e^{C}}_{c'} = \underline{c' e^{A(t)}}$$ allg. Lösung.

Integration in geschlossenen Ausdrücken.

B für geschlossene Ausdrücke.

$$\frac{t^2 + \sin(t)}{t-1}, \qquad \frac{1}{e^{t-t^2}}, \quad \ldots$$

Ist die algebraische Funktion, $y : t \mapsto y(t)$, gegeben durch $y(t)^5 + y(t) + t = 0$ ein geschlossener Ausdruck?

$x \mapsto \sqrt{x^4+1}, \quad x \mapsto e^{-x^2}$

sind integrierbar, aber die Stammfunktion besitzt keinen geschlossenen Ausdruck.

Risch-Algorithmus: Eingabe: geschlossener Ausdruck für $f: x \mapsto f(x)$

Ausgabe: geschlossener Ausdruck für Stammfunktion oder: "es existiert kein solcher geschlossener Ausdruck"