Dynamische Systeme

Notiztitel 10.10.2016

$f : T \to X$

diskret – kontinuierlich

$T = \mathbb{N}$ $\qquad$ $T = \mathbb{R}$ $\quad$ ($\mathbb{R}_{\geq 0}$ oder $[a, b]$)

Rekursion,

$\forall t \in T : f(t+k) = F(f(t), f(t+1), \ldots, f(t+k-1), t)$

Diff-gleichung

$\forall t \in T : \quad f^{(k)}(t) = F(f(t), f'(t), \ldots, f^{(k-1)}(t), t$

t tritt als Input von F auf. nicht autonom

t tritt nicht auf. autonom

F ist üblicherweise stetig

scalar – vektorwertig:

$X = \mathbb{R}$ $\qquad X = \mathbb{R}^n$

Ordnung: K auf der linken Seite der Rekursion/DG linear :: nichtlinear

$F : \mathbb{R} \times T \to \mathbb{R}$ ist linear in der ersten Variable..

$F(x_1 + x_2, t) = F(x_1, t) + F(x_2, t)$

$F(c \cdot x_1, t) = c\, F(x_1, t)$ $\quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$\forall t \in \mathbb{R}$

$\forall c \in \mathbb{R}$

Satz:

Die Lösungsmenge einer linearen Rekursion / einer linearen DG bilden einen Vektorraum.

Rückführungen.

Nicht autonom $\rightsquigarrow$ autonome

DG für $f \quad T \to \mathbb{R}$

$$f'(t) = F(f(t), t) \qquad \forall t$$

equivalent zu:

DG für $g : T \to \mathbb{R}^2$, $g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}$

$$g_1'(t) = F(g_1(t), g_2(t))$$

$$g_2'(t) = 1$$

Reduktion der Ordnung:

B $f''(t) = F(f(t), f'(t))$ Gly. für $f : T \to \mathbb{R}$

ist equivalent zur Gleichung für $y : T \to \mathbb{R}^2$

$\left(y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \right)$

$\forall t: \quad y_1'(t) = y_2(t)$

$y_2'(t) = F(y_1(t), y_2(t))$.

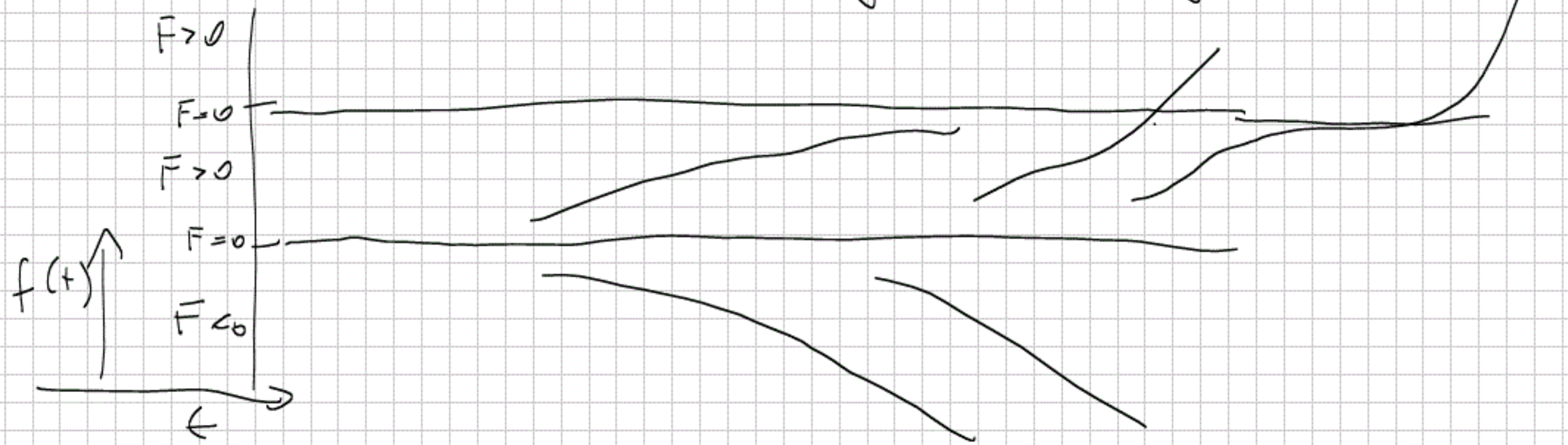
Differentialgleichungen beliebiger Ordnung
können auf vektorwertig autonome
Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückgeführt werden.

Die skalare autonome DG 1. Ordnung:

Glg für $f: T \to \mathbb{R}$:

$$\forall t: \quad f'(t) = F(f(t))$$

wobei $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, stetig.



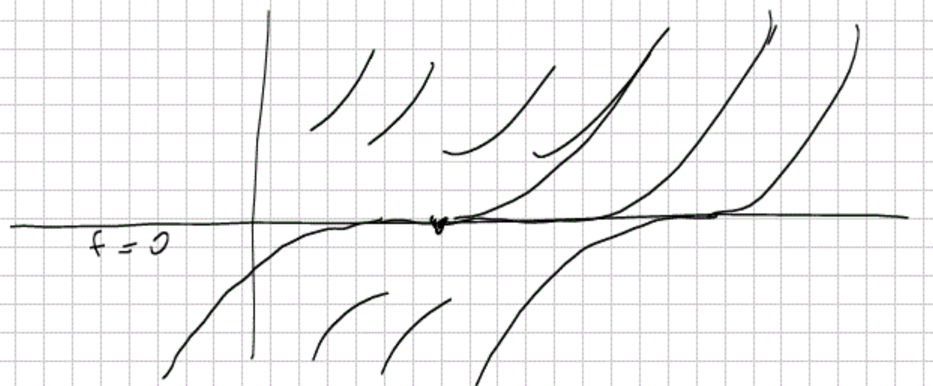
B Konstruieren DG unendlich vieler Lösung

$f(t) = t^3$

$f'(t) = 3t^2 = 3 \cdot f(t)^{2/3}$

$= 3 \sqrt[3]{f(t)}^2$

DG: $f'(t) = 3 \cdot f(t)^{2/3}$



$f = 0$ ist Lösung!

$f(t) = t^3$ ist Lösung

Es sei $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig.

DG für $f: T \to \mathbb{R}^n$ $(T = \mathbb{R})$.

$$f'(t) = F(f(t))$$

m.a.W.

$$f_1'(t) = F_1(f_1(t), \dots, f_n(t))$$

$$\vdots$$

$$f_n'(t) = F_n(f_1(t), \dots, f_n(t))$$

$$F: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$$

Eine Nullstelle von F, d.h. $v \in \mathbb{R}^n$ mit $F(v) = 0$, heißt Equilibrium (Eql) der DG.

Wenn v ein Egl ist, dann ist

$f(t) = v$ eine Lösung

Ein Egl v heißt stabil wenn gilt:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall f: T \to \mathbb{R}$ Lösungen:

$$\| f(0) - v \| < \delta \Rightarrow \forall t > 0 \ \| f(t) - v \| < \varepsilon$$

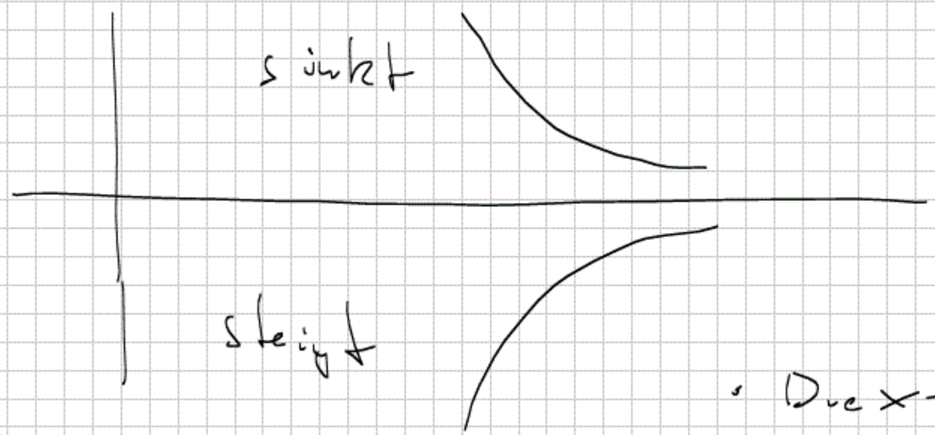
Ein Egl heißt asymptotisch stabil, wenn gilt:

- das Egl ist stabil
- $\exists \varepsilon > 0 \ \forall f \ T \to \mathbb{R}$ Lösung: $\| f(0) - v \| < \varepsilon \Rightarrow$

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = v$$

Beispiele: gly für $f: T \to \mathbb{R}$

$f'(t) = -t \quad \forall t \in \mathbb{R}$



asymptotisch stabil.

- Die x-Achse kann nie überschritten werden

$f(1), f(2), f(3)$ ist monoton steigend (wenn $f(1) \leq 0$) oder monoton fallend (wenn $f(1) \geq 0$)

Daher besitzt $(f(k))_{k \in \mathbb{N}}$ einen Grenzwert

(monoton und beschränkt).

Angenommen $\lim_{k \to \infty} f(k) = a > 0$ (indirekt)

Nach dem MWS der Differentialrechnung
gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein $x_k \in [k, k+1]$
sodaß $f'(x_k) = \frac{f(k+1) - f(k)}{k+1-k}$
Grenzübergang $k \to \infty$ $\rightsquigarrow$ $\lim_{t \to \infty} f'(t) = 0$ ↯

Da: $f'(t) = -f(t)$ $\forall t$ $\lim_{t \to \infty} f(t) = a$

Stabil, aber nicht asymptotisch stabil:

Glg für $f: T \to \mathbb{R}$

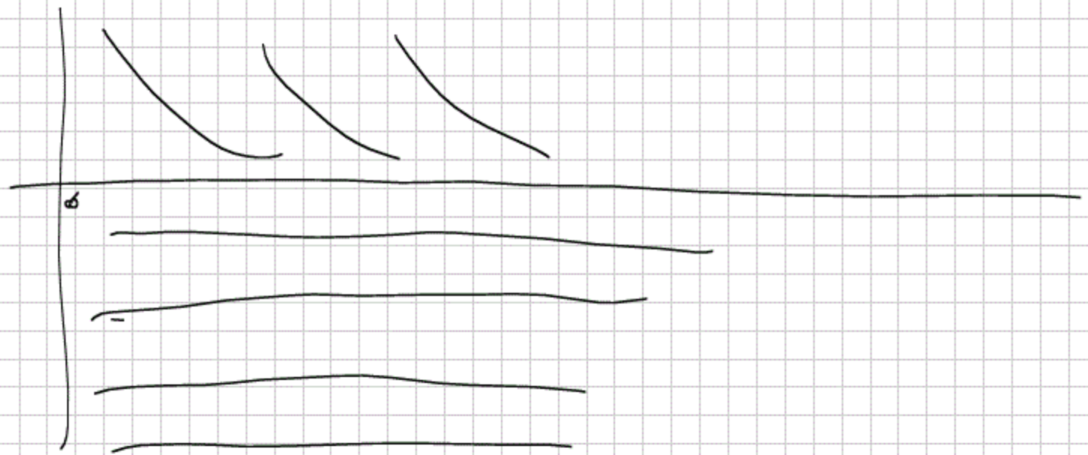
$f'(t) = 0$

Jeder Punkt ist Egl,
alle stabil
keiner asymptotisch stabil.

Oder:

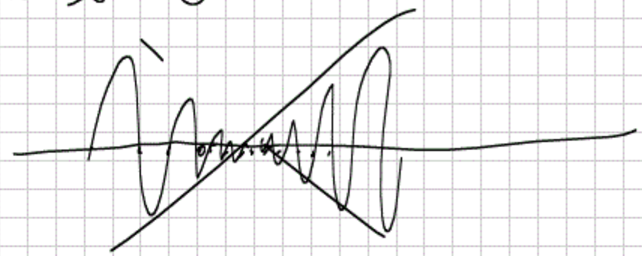
$$f'(t) = \left\{ \begin{array}{ll} -f(t) & \text{falls } f(t) > 0 \\ 0 & \text{falls } f(t) \le 0 \end{array} \right) = F(f(t))$$

mit F stetig.



$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

$$f'(t) = F(f(t))$$



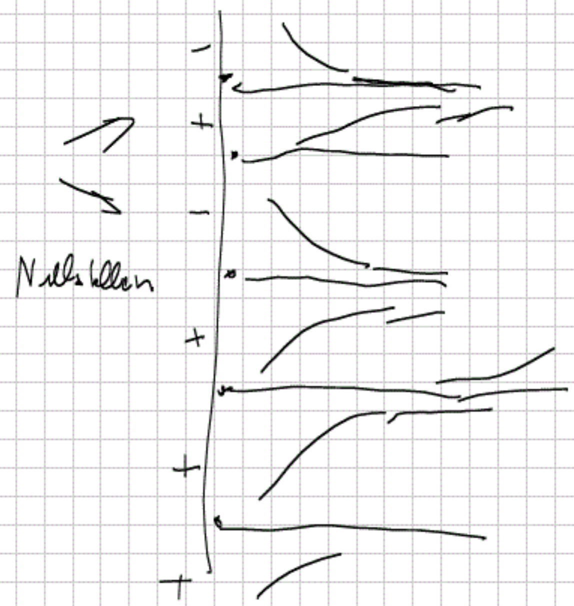
Phasenportrait beschreibt das Verhalten von Lösungen, ohne die Lösung selber zu bestimmen.

Skalarer Fall.

Da für f: $f'(t) = F(f(t))$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

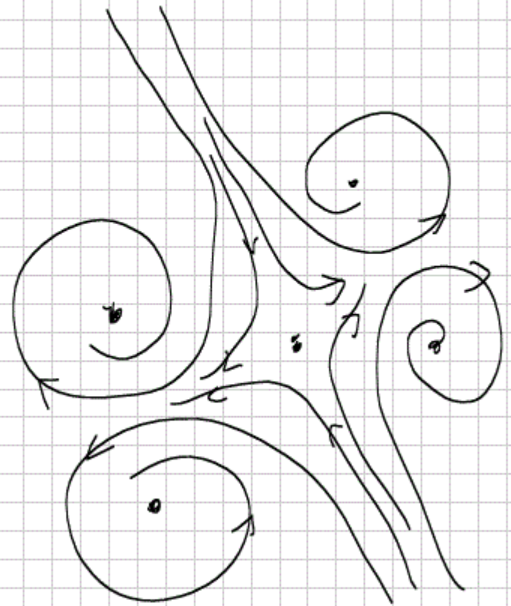
stetig, fix.



Pfeilrichtungen besagen, ob die Funktion in diesem Bereich steigt oder fällt.

Phasenportrait für $f: T \to \mathbb{R}^2$

DG: $f'(t) = F(f(t))$ $\quad F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$



Nullstellen von F:

$F_1(x_1, x_2) = 0$

$F_2(x_1, x_2) = 0$

Parameterabhängige DG:

DG für $f: I \to \mathbb{R}$

$f'(t) = F(f(t), \lambda)$ wobei $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\lambda \in \mathbb{R}$ "Parameter"

B1

$F(t, x) = \lambda - x$. DG. $f'(t) = \lambda - f(t)$.

Eql: $x = \lambda$ für jedes λ

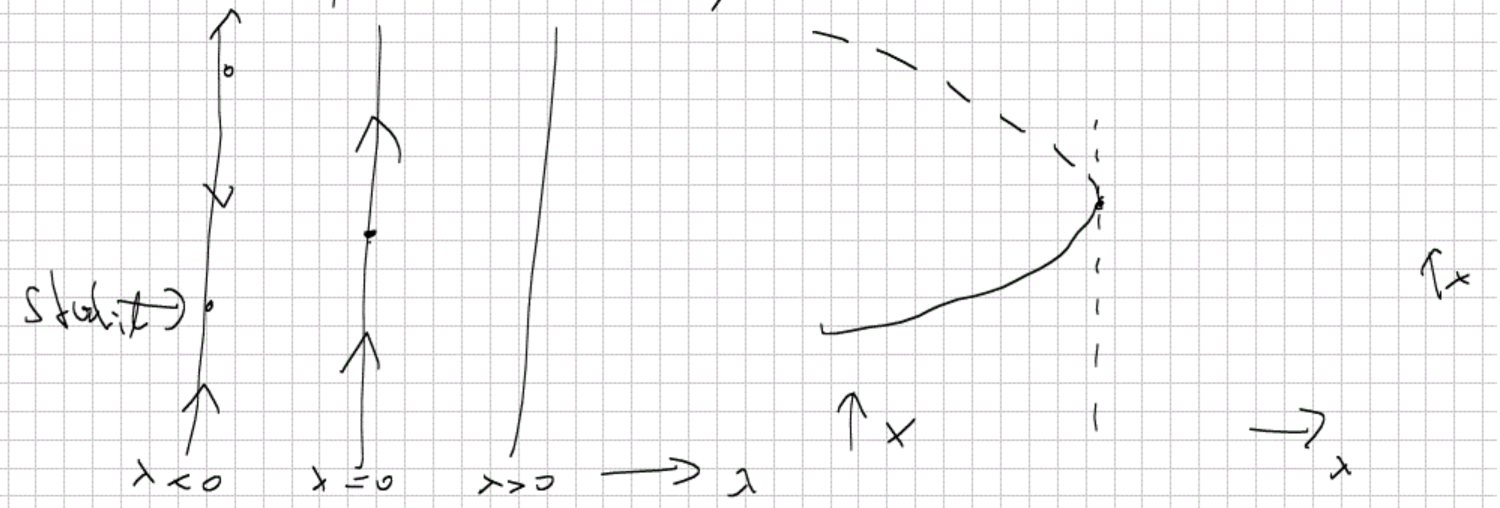
Eql wird nur verschoben, ändert nicht den Typ.

B2 $F(x,\lambda) = x^2 + \lambda$

$\lambda > 0$: kein Eql

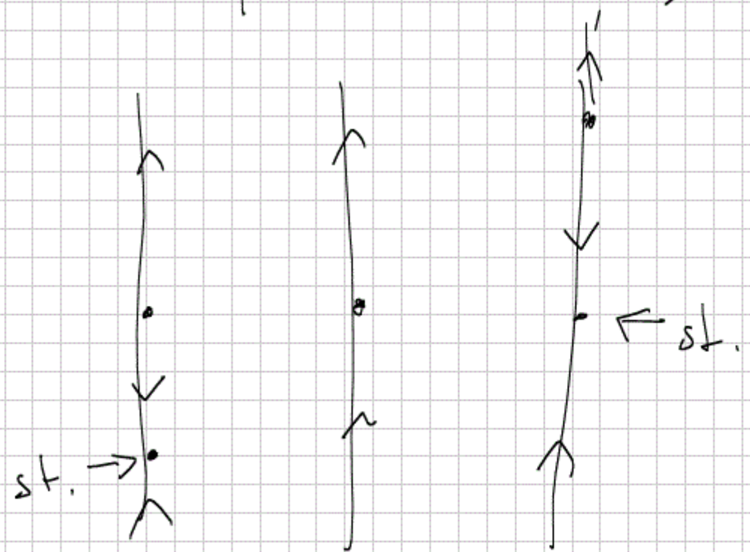
$\lambda = 0$: 0 ist Eql

$\lambda < 0$: 2 Eql. $x = \sqrt{\lambda}$, $x = -\sqrt{\lambda}$

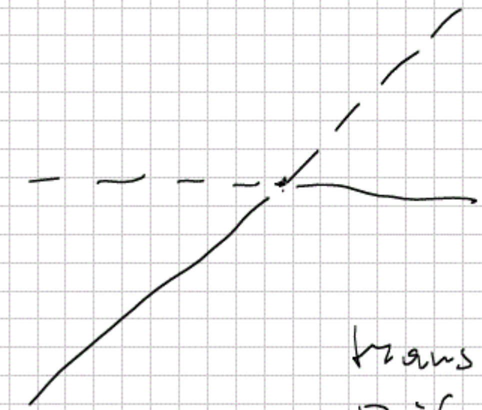


B3 $\quad F(x) = x(x-\lambda)$

Eql: $\quad x = 0 \quad x = \lambda$



$\lambda < 0 \qquad \lambda = 0 \qquad \lambda > 0$



transkritische Bifurkation.

