Übungsblatt 9

für den **15/12/2020**

Beispiel 31 Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x, y) = (-\sin(x), \cos(y) - \sin(x))$.

a) Bestimme die Equilibrium und deren topologischen Typ (hyperbolisch? Quelle / Senke / Sattelpunkt?).

b) Ist F lokal topologisch equivalent zum Vektorfeld $G : (x, y) \mapsto (-x, -y)$? Sind F, G transformationsequivalent?
Visualisiere F, G jeweils um deren Equilibrien.

Beispiel 32 Bestimme eine Ljapunov-Funktion folgender Vektorfelder $F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für das Equilibrium $(0, 0)$:

a) $F_1(x, y) = (-x + y^2 + x^3, -y)$

b) $F_2(x, y) = (-x^3 + y, -2x - y^5)$

Visualisiere jeweils die Vektorfelder und gib eine offene Umgebung W von $(0, 0)$ an, die der Fluss nicht mehr verlässt.

Beispiel 33 Zeige den Satz von Hartmann/Grobmann für den Fall, dass alle Eigenwerte positiven Realteil haben:
Zeige dazu, dass x_0 instabil ist, wenn es eine differenzierbare Funktion $g : X \to \mathbb{R}$ und einer Umgebung U von x_0 mit folgenden Eigenschaften gibt:

- $g(x_0) = 0$ und $g(x) > 0$ für $x \in U \setminus \{x_0\}$;
- $\partial_F(g)(x) > 0$ für $x \in U \setminus \{x_0\}$.

Zeige weiters die Existenz von g und U.

Beispiel 34 Die Systeme

$$F_1(x, y) = (y - x^3, -x - y^3), \; F_2(x, y) = (y + x^3, -x + y^3)$$

sind Störungen des linearen Systems $F(x, y) = (y, -x)$. Zeige, dass jedes der drei Systeme $(0, 0)$ als einziges Equilibrium hat und zeige, dass der Ursprung für F_1 asymptotisch stabil, für F_2 instabil und für F stabil (und nicht asymptotisch stabil) ist.
Hinweis: Für F_1 kann eine Ljapunov-Funktion bzw. für F_2 Aufgabe 33 verwendet werden.