Übungsblatt 7

für den **24/11/2020**

Für Berechnungen können Sie Computeralgebra-Systeme wie `Mathematica` oder `Maple` verwenden.

Beispiel 23 Berechne mit Hilfe des Eulerschen Polygonzugverfahrens Näherungslösungen g_N auf $T = [0, 1]$ mit $N = 10, 100, 1000$ Teilintervallen für folgende Anfangswertprobleme:

a) $\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = f(t) + 1,\ f(0) = 0.$

b) $\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = f(t)^2,\ f(0) = 1.$

Plotte sowohl die exakten als auch die Näherungslösungen (soweit als möglich). Welche Werte ergeben sich insbesondere für $g_N(1)$ bzw. f nahe bei $t = 1$?

Beispiel 24 a) Betrachte die beiden Anfangswertprobleme aus Beispiel 23 und berechne eine Näherungslösung mit Hilfe des Picard-Lindelöf Operators iterativ angewandt auf die Funktion $f_0(t) = f(0)$ auf $T = [0, 1]$.

b) Im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf haben wir T in Teilintervalle unterteilt, sodass $l(T)\, L < 1$, wobei L die Lipschitz-Konstante der rechten Seite im AWP ist. Führe bei dem AWP aus Beispiel 23(a) eine solche Teilung von T durch und verifiziere damit

$$||f - g||_\infty \leq \frac{|x_0 - f(t_0)|}{1 - l(T)L},$$

wobei g die allgemeine Lösung mit unbestimmtem AW x_0 ist.

Beispiel 25 Wir zeigen den *Satz von Peano* im skalaren Fall:
Sei $T \times X \subset \mathbb{R}^2$ kompakt und $F : T \times X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann besitzt für $t_0 \in T, x_0 \in X$ und $f : T \to X$ das AWP

$$f'(t) = F(t, f(t)),\ f(t_0) = x_0$$

eine lokale Lösung.
Beweisskizze: Wir definieren zuerst maximale $(t_0 - a, t_0 + a) \subset T, (x_0 - b, x_0 + b) \subset X$. Damit setzen wir $\alpha = \min(a, b/||F||_\infty), J = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$ und $K = C^0(J, (x_0 - b, x_0 + b))$ als abgeschlosse, konvexe Menge im vollständigen Funktionenraum $(C^0(J, \mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$. Zeige nun folgende Punkte:

a) Die Funktion $f \in K$ löst das AWP genau dann wenn es ein Fixpunkt vom Picard-Lindelöf Operator $P : K \to K$ ist. Dazu ist insbesondere $P(K) \subset K$ zu zeigen.

b) P ist stetig (auf K).

c) $P(K)$ ist punktweise beschränkt und gleichmäßig stetig.

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli besitzt somit jede Folge aus $P(K)$ auf J eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Dadurch ist $P(K)$ relativ kompakt und die Aussage folgt mit dem Fixpunktsatz von Schauder.

Beispiel 26 Betrachte das AWP $f'(t) = F(t, f(t)),\ f(0) = 0$ für $f : T = [-1, 1] \to [-1, 1]$ mit stetigem

$$F(t,x) = \begin{cases} 0, & t = 0, |x| \leq 1 \\ 2t, & 0 < |t| \leq 1, -1 < x < 0 \\ 2t - \frac{4x}{t}, & 0 < |t| \leq 1, 0 \leq x \leq t^2 \\ -2t, & 0 < |t| \leq 1, t^2 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

a) Zeige, dass eine iterative Anwendung des Picard-Lindelöf Operators auf $f_0 = 0$ zu einer alternierenden Folge führt.

b) Wie passt dieses Verhalten zum Satz von Peano bzw. Satz von Picard-Lindelöf? Betrachte dazu ob die Voraussetzungen bzw. Schlussfolgerungen dieser beiden Sätze erfüllt sind.