Übungsblatt 6

für den **17/11/2020**

Beispiel 19 Um das SIR-Modell zur Ausbreitung einer Infektion zu lösen, löse man zunächst folgendes inhomogene System linearer Differentialgleichungen für $s, i, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$s' = -\nu s,\ i' = \nu s - 1,\ r' = 1, \tag{1}$$

wobei $\nu > 0$ eine reelle Konstante ist. Man löse das AWP mit der Anfangsbedingung

$$s(0) = 1, i(0) = 0, r(0) = 0.$$

Es sei t_1 die kleinste positive Nullstelle von i (falls existent). Man berechne numerisch – für verschiedene Werte von ν – den Wert des Quotienten $s(t_1) : r(t_1)$.

Das SIR-Modell zur Ausbreitung einer Infektion wird durch folgendes System von Differentialgleichung für $S, I, R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschrieben:

$$S' = -\nu SI,\ I' = \nu SI - I,\ R' = I. \tag{2}$$

Die Vektoren des s, i, r und S, I, R Systems sind parallel. Daher sind die Bilder der Lösungskurven gleich und die Lösungen unterscheiden sich nur durch die Parametrisierung. Es existiert eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass

$$\forall t:\ S(t) = s(f(t)), I(t) = i(f(t)), R(t) = r(f(t)) \tag{3}$$

gilt. Offensichtlich ist $r(t) = t$, also $S(t) = s(R(t))$ und $I(t) = i(R(t))$, für alle t.

Man löse die Differentialgleichung für R

$$\forall t:\ R'(t) = (I(t) =) i(R(t)).$$

Die Funktionen S und I können dann aus Gleichung (3) bestimmt werden.

Beispiel 20 Untersuche, ob folgende Anfangswertprobleme für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung besitzen.

a) $f'(t) = \frac{e^t f(t)^3}{1+f(t)^2} + t \sin(f(t)),\ f(0) = 1.$

b) $t f'(t) = 3f(t),\ f(0) = 0.$

Beispiel 21 Bestimme den Picard-Lindelöf Operator $P : C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des AWP

$$\forall t : f'(t) = t\, f(t),\ f(0) = 1$$

für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Folge $(f_n)_n$ sei definiert durch $f_0 : t \mapsto 0$ und $\forall n \in \mathbb{N} : f_n = P(f_n)$. Berechne die ersten fünf Folgenglieder. Vergleiche mit der Taylorentwicklung der exakten Lösung.

Beispiel 22 Formuliere und zeige den Satz von Picard-Lindelöf für Anfangswertprobleme höherer Ordnung.