Übungsblatt 5

für den **10/11/2020**

Beispiel 15 Löse das Anfangswertproblem

$$f''(t) + 2f'(t) + f(t) = te^t,\ f(0) = -1/4, f'(0) = 1$$

für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indem man eine lineare homogene Differentialgleichung mit te^t als Lösung findet und Operatorenrechnung anwendet.

Beispiel 16 Man berechne das Matrixexponential folgender Matrizen.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -12 & -16 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Im Fall von A_3 wird empfohlen nicht die Methode der Jordan-Normalform zu verwenden, sondern die Exponentialreihe direkt zu berechnen.

Beispiel 17 a) Berechne für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die inverse Matrix von e^{At}.

b) Zeige Rechengesetz 4:
Für invertierbare $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

$$e^{BAB^{-1}t} = Be^{At}B^{-1}.$$

c) Zeige die Umkehrung des Rechengesetzes 3 für das Matrixexponential:
Wenn

$$\forall t : e^{(A+B)t} = e^{At}\, e^{Bt}$$

gilt, dann gilt

$$AB = BA.$$

Hinweis: man berechne die zweiten Ableitungen der beiden Seiten der Gleichung bei $t = 0$.

Beispiel 18 Löse das Anfangswertproblem

$$f'''(t) - 2f''(t) + f'(t) - 2f(t) = 0,\ f(0) = 0, f'(0) = f''(0) = 1$$

für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) direkt über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms;
b) durch Rückführung auf ein System erster Ordnung und über die Berechnung des Matrixexponentials.