17.12.2019

Übungsklausur, Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

Name: ______________________________ Matrikelnummer: ____________________

1. Betrachte für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die parameterabhängige Differentialgleichung
$$\forall t : f'(t) = \lambda\, f(t)^2 - f(t). \tag{1}$$
   (a) (1 Punkt) Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf (1) zu: linear / autonom / skalar / erste Ordnung / zweite Ordnung?
   (b) (2 Punkte) Zeichne für den Fall $\lambda = 1$ ein Phasenportrait und den Verlauf von etwaigen Lösungskurven.
   (c) (4 Punkte) Zeichne für $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Bifurkationsdiagramm, in dem die Equilibria und deren Stabilität ((asymptotisch) stabil / halbseitig stabil / instabil) ersichtlich sind.

2. (a) (4 Punkte) Berechne die Exponentialmatrix von
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   und bestimme damit für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$\forall t : f'(t) = A\, f(t).$$
   (b) (3 Punkte) Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung
$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = A\, f(t) + \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   mittels Variation der Konstanten.
   Hinweis: Die Lösung der homogenen Differentialgleichung lässt sich schreiben als
$$f_h(t) = \begin{pmatrix} (c_1 + 2c_2\, t)\, \exp(-t) \\ c_2\, \exp(-t) \end{pmatrix}.$$

3. (a) (4 Punkte) Berechne für $T = \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung
$$\forall t \in T : f(t) = 2\sqrt{2+t}\, f'(t). \tag{2}$$
   mit einem Anfangswert $f(0) = 2\exp(\sqrt{2})$.
   (b) (2 Punkte) Ist eine Lösung von (2) mit einem beliebigen Anfangswert $f(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ auf $T = (-1, \infty)$ eindeutig? Begründe ausführlich.
   (c) (Bonus: 2 Punkte) Wir definieren zugehörig zu (2) das Vektorfeld
$$F : X = (-1, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2;\ (t, x) \mapsto \left(1, \frac{x}{2\sqrt{2+t}}\right).$$
   Berechne den Fluss $\phi : D \to X$ von F und spezifiziere dessen Definitionsbereich D.