Übungsblatt 9

für den **03/12/2019**

Für Berechnungen können Sie Computeralgebra-Systeme wie `Mathematica` oder `Maple` verwenden.

Beispiel 24 Berechnen Sie mit Hilfe des Eulerschen Polygonzugverfahrens Näherungslösungen g_N mit $N = 10, 100, 1000$ Teilintervallen für folgende Anfangswertprobleme:

a) $\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = f(t) + 1,\ f(0) = 0.$

b) $\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = f(t)^2,\ f(0) = 1.$

Plotten Sie sowohl die exakten als auch die Näherungslösungen. Welche Werte ergeben sich insbesondere für $g_N(1)$ bzw. f nahe bei 1?

Beispiel 25 Betrachten Sie die beiden Anfangswertprobleme aus Beispiel 24 und berechnen Sie eine Näherungslösung mit Hilfe des Picard-Lindelöf Operators $P : C^0([0,1]) \to C^0([0,1])$ (siehe Skript Seite 38) iterativ angewandt auf die Funktion $f_0(t) = f(0)$, also

$$\forall i \in \{1, \ldots, 5\} : f_{i+1}(t) = P(f_i(t)).$$

Vergleichen Sie mit der Taylor-Entwicklung der exakten Lösungen mit Entwicklungspunkt 0.

Beispiel 26 Führen Sie das Zweischrittverfahren angewandt auf das erste Anfangswertproblem aus Beispiel 24 so durch, dass Sie Konvergenz garantieren können.
Hinweis: Unterteilen Sie $[0, 1]$ in kleinere Intervalle und wenden Sie die Fehlerschranken aus der Folgerung von Picard-Lindelöf. Die benötigten zusätzlichen Startwerte können z.B. mittels erster Abschätzungen aus dem Eulerschen Polygonzugverfahren oder dem Einschrittverfahren gewonnen werden.