

Übungsblatt 7

für den 19/11/2019

Beispiel 18 Man berechne $\exp(A_i t)$ für $i = 1, 2, 3$ mit

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -12 & -16 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Im Fall von A_3 wird empfohlen nicht die Methode der Jordan-Normalform zu verwenden, sondern die Exponentialreihe direkt zu berechnen.

Beispiel 19 a) Berechnen Sie für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die inverse Matrix von e^{At} .

- b) Zeigen Sie Rechengesetz 4:
Für invertierbare $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$e^{B A B^{-1} t} = B e^{A t} B^{-1}.$$

- c) Zeigen Sie die Umkehrung des Rechengesetzes 3 für Exponentialmatrizen:
Wenn

$$\forall t : e^{(A+B)t} = e^{A t} e^{B t}$$

gilt, dann gilt

$$A B = B A.$$

Hinweis: man berechne die zweiten Ableitungen der beiden Seiten der Gleichung bei $t = 0$.

Beispiel 20 Zeigen Sie, dass die Kurve $\{\exp(At) \mid t \geq 0\}$ definiert durch

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

ein mehrdimensionales Objekt (im Sinne der Hausdorff-Dimension; Wir gehen hier nicht näher darauf ein.) beschreibt.

Hinweis: Projizieren Sie $\exp(At)$ auf Komponenten, deren Bild eine dichte Teilmenge von $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ist.