Übungsblatt 2

für den **15/10/2019**

Beispiel 3 Gegeben sei die Differentialgleichung

$$F(t, f(t), \dots, f^{(n)}(t)) = 0. \tag{1}$$

a) Führe (1) auf ein autonomes System von Differentialgleichungen zurück.

b) Falls F linear ist, gilt das dann auch für das neue System? Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

c) Führe die Differentialgleichung

$$f''(t)^2 = f(t)\, f'(t) + t^3$$

mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf ein autonomes System von Differentialgleichungen erster Ordnung zurück.

Beispiel 4 a) Führe die Rekursionsgleichung

$$f(t+1) = A(t)\, f(t) + b(t)$$

mit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und gegebenen $A : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{n \times n},\ b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ auf eine homogene lineare Rekursion zurück.

b) Die geometrische Reihe kann rekursiv definiert werden als das System

$$\forall t \in \mathbb{N} : a(t+1) = q\, a(t),\ \ s(t+1) = s(t) + a(t)$$

mit Startwerten $a(0) = 1$ und $s(0) = 0$. Man schreibe das System als vektorwertige Rekursion in der Form $(a, s)(t+1) = M \cdot (a, s)(t)$.

Bonus: Berechne einen geschlossenen Ausdruck für $M^n, n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 5 Sei X ein Vektorraum der Dimension d, $k \in \mathbb{N}$ und $F : X^k \times \mathbb{N} \to X$ eine lineare Abbildung in X^k. Zeige, dass die Menge der Lösungen

$$L = \{f : \mathbb{N} \to X \mid \forall t \in \mathbb{N} : f(t+k) = F(f(t), \dots, f(t+k-1), t)\}$$

ein Vektorraum der Dimension $k\, d$ ist.

Hinweis: Zeige, dass die Abbildung $L \to X^k,\ f \mapsto (f(0), \dots, f(k-1))$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.