Übungsblatt 12

für den **14/01/2020**

Beispiel 30 Bestimmen Sie eine Ljapunov-Funktion folgender Vektorfelder $F_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ für das Equilibrium $(0,0)$:

a) $F_1(x,y) = (-x + y^2 + x^3, \; -y)$

b) $F_2(x,y) = (-x^3 + y, \; -2x - y^5)$

Visualisieren Sie jeweils die Vektorfelder und geben Sie eine offene Umgebung W von $(0,0)$ an, sodass gilt

$$\forall t > 0, p \in W : \phi_F(t,p) \in W, \; \lim_{t\to\infty} \phi_F(t,p) = (0,0).$$

Beispiel 31 Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x,y) = (sin(x), \; sin(x) + cos(y))$.

a) Bestimmen Sie die Equilibrien.

b) Bestimmen Sie den topologischen Typ (Quelle / Senke / Sattelpunkt) der hyperbolischen Equilibrien.

c) Geben Sie die jeweils topologische equivalente Linearisierung L von F an. Können Sie mithilfe der Jakobi-Matrizen F' und L' etwas über deren mögliche Transformationsequivalenz aussagen?

Beispiel 32 Wir nennen zwei Rekursionsgleichungen implizit gegeben durch stetige Funktionen $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *transformationsequivalent*, wenn eine stetiger Homöomorphismus $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, sodass

$$G = T^{-1} \circ F \circ T$$

gilt. Transformationsequivalente Rekursionsgleichungen haben die gleiche Anzahl von Fixpunkten und von $k-$Zyklen für jedes $k \in \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass sich jede quadratische Rekursionsgleichung mit Startwert x_0 gegeben durch

$$\forall k \geq 1 : x_{k+1} = F(x_k) = a\, x_k^2 + b\, x_k + c \;\text{ mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

transformationsequivalent zu einer Rekursionsgleichung der Form

$$\forall k \geq 1 : y_{k+1} = G(y_k) = \lambda\, y_k(1 - y_k)$$

mit einem Startwert y_0 und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist.

Ist λ in G durch a, b, c in F eindeutig bestimmt?