

Gewöhnliche Differentialgleichungen  
und  
Dynamische Systeme

Sebastian Falkensteiner und Josef Schicho

2. Dezember 2020

# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Typen von Dynamischen Systemen</b>                                   | <b>3</b>  |
| 1.1      | Lineare Rekursionen . . . . .   | 4         |
| 1.2      | Kontinuierliche Dynamische Systeme . . . . .                            | 5         |
| 1.3      | Zusammenhang zwischen diskreten und kontinuierlichen Systemen . . . . . | 6         |
| <b>2</b> | <b>Stabilitätsanalyse von kontinuierlichen Systemen</b>                 | <b>8</b>  |
| 2.1      | Skalare autonome Differentialgleichungen . . . . .                      | 8         |
| 2.2      | Stabile und Asymptotisch Stabile Equilibrien . . . . .                  | 9         |
| 2.3      | Bifurkationen . . . . .   | 11        |
| <b>3</b> | <b>Lösungsverfahren</b>   | <b>14</b> |
| 3.1      | Symbolische Lösungen . . . . .  | 15        |
| 3.2      | Trennung der Variablen . . . . .  | 16        |
| 3.3      | Reduktion der Ordnung . . . . .   | 18        |
| 3.4      | Variation der Konstanten . . . . .                                      | 20        |
| 3.5      | Unlösbarkeitsresultate . . . . .  | 23        |
| <b>4</b> | <b>Lineare Autonome Systeme</b>   | <b>25</b> |
| 4.1      | Lineare Autonome Rekursionen . . . . .                                  | 25        |
| 4.2      | Lineare Autonome Differentialgleichungen . . . . .                      | 31        |
| 4.3      | Matrixexponential . . . . .   | 33        |
| 4.4      | Eine Alternative zu VdK . . . . .                                       | 35        |
| <b>5</b> | <b>Existenz und Eindeutigkeit</b>                                       | <b>38</b> |
| 5.1      | Satz von Picard-Lindelöf . . . . .                                      | 38        |
| 5.2      | Vollständigkeit des Funktionenraums . . . . .                           | 40        |
| 5.3      | Beweis des Satzes von Picard/Lindelöf . . . . .                         | 41        |
| 5.4      | Differenzierbare Vektorfelder . . . . .                                 | 44        |
| <b>6</b> | <b>Äquivalenz und lokale Äquivalenz</b>                                 | <b>50</b> |
| 6.1      | Der Fundamentalsatz der Algebra . . . . .                               | 50        |
| 6.2      | Satz von Hartmann/Grobmann . . . . .                                    | 52        |
| 6.3      | Fixpunkte und Zykel . . . . .   | 59        |
| <b>7</b> | <b>Die Poincare-Rückkehrabbildung</b>                                   | <b>63</b> |
| 7.1      | Der Satz von Poincare/Bendixson . . . . .                               | 64        |
| 7.2      | Chaos . . . . .   | 67        |
| <b>8</b> | <b>Ausblick: Differentialgeometrie</b>                                  | <b>69</b> |

# 1 Typen von Dynamischen Systemen

Ein *dynamisches System* ist ein mathematisches Modell eines Prozesses durch Funktionen von einer Menge  $T$  (Zeit) in einen Raum  $X$ . Die Menge  $T$  ist entweder gleich  $\mathbb{R}$  bzw. ein Intervall von  $\mathbb{R}$  (*kontinuierliches* dynamisches System) oder gleich  $\mathbb{N}$  (*diskretes* dynamisches System). Der Raum  $X$  ist meistens ein reeller endlich-dimensionaler Vektorraum – bei linearen dynamischen Systemen ist das unabdingbar – oder eine Teilmenge eines Vektorraumes. Das Wesentliche ist, dass die Funktion (manchmal auch eine Menge von Funktionen) nicht durch einen expliziten Ausdruck beschrieben wird, sondern im diskreten Fall durch eine Rekursion und im kontinuierlichen Fall durch eine Differentialgleichung.

Wir beginnen mit dem diskreten Fall:  $T = \mathbb{N}$ , und  $X \subset \mathbb{R}$  oder  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Die Funktion  $f : T \rightarrow X$  wird beschrieben durch die Rekursionsgleichung der Ordnung  $k > 0$ , die wie folgt aussieht:

$$\forall t \in T : f(t+k) = F(f(t), f(t+1), \dots, f(t+k-1), t),$$

wobei  $F : (X^k \times T) \rightarrow X$  eine gegebene stetige Funktion ist. Sobald die Anfangswerte  $f(0), f(1), \dots, f(k-1)$  bekannt sind, ist die Funktion  $f$  eindeutig festgelegt und kann mit einem Programm rekursiv für jede natürliche Zahl ausgewertet werden.

Oftmals ist  $F$  nicht explizit von  $t$  abhängig und wir sprechen in diesem Fall von einer *autonomen* (zeitunabhängigen) Rekursion. Der nicht-autonome Fall entspricht eigentlich nicht der “Philosophie” der dynamischen Systeme: wenn wir zeitabhängige Rekursionen erlauben, können wir auch gleich einen Ausdruck für die Funktion

$$F(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, t) := A(t)$$

in der Rekursionsgleichung betrachten und hätten dann die explizite Darstellung  $f(t+k) = A(t)$ . Jedoch wollten wir diese explizite Darstellung in der Theorie der dynamischen Systeme ausschließen. Daher betrachten wir den autonomen Fall als Standardfall.

Wenn uns jetzt eine nicht-autonome Rekursion über den Weg läuft und wir trotzdem philosophisch auf der Linie der dynamischen Systeme bleiben wollen, dann ist das möglich: der nicht-autonome Fall lässt sich immer auf den autonomen Fall zurückführen. Außerdem können Rekursionen beliebiger Ordnung immer auf Rekursionen erster Ordnung zurückgeführt werden. Beide Rückführungen sind nicht gratis, sie gehen auf Kosten höherer Dimension  $n$  des Wertebereiches von  $f$ .

Wir beschreiben zuerst die Rückführung einer nicht-autonomen Rekursion erster Ordnung für eine Funktion  $f : T \rightarrow X$ , gegeben durch die Funktion  $F : (X \times T) \rightarrow X$ ; als Rekursion für  $f$  liest sich das so:

$$\forall t \in T : f(t+1) = F(f(t), t). \tag{1}$$

Wir definieren nun  $Y := X \times T$  und die Funktion

$$G : Y \rightarrow Y, (x, t) \mapsto (F(x, t), t+1),$$

die eine Rekursion für  $g : T \rightarrow Y$  definiert:

$$\forall t \in T : g(t+1) = G(g(t)). \tag{2}$$

Wenn nun  $f : T \rightarrow X$  die Rekursion (1) erfüllt, dann erfüllt die Funktion  $(x, t) \mapsto (f(t), t)$  die Rekursion (2). Umgekehrt: wenn  $g : T \rightarrow Y$  die Rekursion (2) erfüllt und einen Startwert  $g(0)$  mit  $t$ -Komponente gleich 0 hat, dann ist die erste Komponente von  $g$  eine Lösung von Rekursion (1) und die zweite Komponente ist die Identität  $t \mapsto t$ . Bei Rekursionen höherer Ordnung funktioniert eine ähnliche Rückführung (wobei es beim Ausdenken einer Rekursion für die Zeitkomponente ein bisschen Platz für Kreativität gibt).

Nun beschreiben wir die Rückführung einer autonomen Rekursion von Ordnung  $k > 1$  für eine Funktion  $f : T \rightarrow X$ , gegeben durch eine Funktion  $F : X^k \rightarrow X$  und als Rekursion geschrieben

$$\forall t \in T : f(t+k) = F(f(t), f(t+1), \dots, f(t+k-1)), \quad (3)$$

auf eine Rekursion erster Ordnung. Wir definieren  $Y := X^k$  und die Funktion

$$G : Y \rightarrow Y, (x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \mapsto (x_1, x_2, \dots, F(x_0, x_1, \dots, x_{k-2})).$$

Diese definiert wieder eine Rekursion für  $g : T \rightarrow Y$ ; die Rekursionsgleichung ist die gleiche wie in (2). Wenn  $f : T \rightarrow X$  nun die Rekursion (3) erfüllt, dann erfüllt die Funktion  $t \mapsto (f(t), f(t+1), \dots, f(t+k-1))$  die Rekursion (2). Wenn umgekehrt  $g$  die Rekursionsgleichung (2) erfüllt, dann erfüllt jede der  $k$  Komponenten die Rekursion (3).

## 1.1 Lineare Rekursionen

Es sei nun  $X$  ein reeller Vektorraum. Eine nicht notwendigerweise autonome Rekursion, gegeben durch eine Funktion  $F : (X^k \times T) \rightarrow X$ , heißt *linear*, wenn für jedes  $t \in T$  die Funktion  $(x_0, \dots, x_{k-1}) \mapsto F(x_0, \dots, x_{k-1}, t)$  linear ist. Die Lösungen bilden einen Vektorraum der Dimension  $k \dim(X)$ . Ferner ist die Abbildung, die jedem  $k$ -Tupel von Anfangswerten  $(x_0, \dots, x_{k-1}) \in X^k$  die eindeutig bestimmte Lösung der Rekursion mit diesen Anfangswerten zuordnet, ein Isomorphismus von Vektorräumen (siehe Aufgabe 1.2).

Die oben beschriebene Rückführung liefert eine lineare Rekursion erster Ordnung. Beschränken wir uns daher (vorläufig) auf eben solche. Es sei  $X = \mathbb{R}^n$ . Dann kann die Funktion  $F$  auch als matrixwertige Funktion  $A : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , also

$$F(x_0, \dots, x_{k-1}, t) = A(t) \cdot (x_0, \dots, x_{k-1}),$$

geschrieben werden. Der Vektorraum-Isomorphismus zwischen Anfangswerten und Lösungen lässt sich ebenfalls als matrixwertige Funktion  $B \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  schreiben. Die Lösung  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Rekursion

$$\forall t \in T : f(t+1) = A(t)f(t)$$

lässt sich dann schreiben als

$$g(t) = B(t)(g(0), \dots, g(k-1)).$$

Die Matrix  $B$  erfüllt die Gleichungen

$$\forall t : B(t+1) = A(t)B(t), \quad B(0) = I_n.$$

Die Matrix  $B(t)$  kann berechnet werden durch Aufmultiplizieren der Matrizen  $A(0), \dots, A(t-1)$  von rechts nach links.

Im autonomen Fall ist das alles viel einfacher: statt einer matrix-wertigen Funktion haben wir eine einzige Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , und  $B(t) = A^t$ . Diesen Fall werden wir später noch genauer studieren.

**Bemerkung 1.1.** Wie bereits erwähnt, lassen sich nicht-autonome Rekursionen immer auf autonome Rekursionen zurückführen. Leider wird bei dieser Reduktion im Allgemeinen die Linearität nicht beibehalten, darum ist die Theorie der nicht-autonomen linearen Rekursionen (bzw. im kontinuierlichen Fall die Theorie der nicht-autonomen linearen Differentialgleichungen) komplizierter also die Theorie der autonomen linearen Rekursionen (bzw. der autonomen linearen Differentialgleichungen).

Sofern nicht explizit anders geschrieben, verstehen wir unter einer “linearen Rekursion” eine homogene lineare Gleichung. Die *inhomogene* lineare Rekursion für  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist von der Form

$$\forall t \in T : f(t+1) = A(t)f(t) + b(t),$$

wobei  $A : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  eine gegebene matrixwertige Funktion und  $b : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine gegebene vektorwertige Funktion ist. Es ist nicht schwierig, eine solche inhomogene Rekursion auf eine homogene lineare Rekursion zurückzuführen. Dazu betrachten wir  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  und

$$\forall t \in T : g(t+1) = \left( \begin{array}{ccc|c} A(t) & & & b(t) \\ \hline 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right) g(t)$$

mit der Anfangsbedingung, dass die letzte Komponente von  $g(0)$  gleich 1 ist. Dann sind die ersten  $n$  Komponenten von  $g$  gleich  $f$ , und die letzte Komponente ist konstant 1.

## 1.2 Kontinuierliche Dynamische Systeme

In diesem Kapitel ist  $T = \mathbb{R}$  oder eine zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}$  (also ein Intervall).  $X$  ist wieder ein endlich-dimensionaler reeller Vektorraum oder eine Teilmenge davon. Eine Funktion  $f : T \rightarrow X$  wird in diesem Fall beschrieben durch eine Differentialgleichung der Ordnung  $k > 0$  als

$$\forall t \in T : f^{(k)}(t) = F(f(t), f'(t), \dots, f^{(k-1)}(t), t), \quad (4)$$

wobei  $F : (X^k \times T) \rightarrow X$  eine gegebene stetige Funktion ist. Im Unterschied zum diskreten Fall ist Lösbarkeit und Eindeutigkeit überhaupt nicht klar. Der fundamentale Satz von Picard/Lindelöf, der später noch ausführlich behandelt wird, besagt, dass unter gewissen Voraussetzungen an  $F$  eine Lösung  $f$  der Differentialgleichung (4) existiert. Ferner ist die Lösung eindeutig durch die Anfangswerte  $f(0), f'(0), \dots, f^{(k-1)}(0)$  festgelegt.

In anderer Hinsicht jedoch ist die Theorie der kontinuierlichen Systeme einfacher als die der diskreten Systeme. Zum Beispiel kann man im kontinuierlichen Fall sehr einfach “die

Zeit umdrehen" und ein lineares System aufstellen, das in die Vergangenheit schaut. Man braucht dazu nur in der Differentialgleichung  $t$  durch  $-t$  ersetzen. Im diskreten Fall kann man die Rekursionen im Allgemeinen nicht nach rückwärts verfolgen. Dazu müsste zum Beispiel im Fall von  $F : X \rightarrow X$  und der Rekursion  $\forall t : f(t + 1) = F(f(t))$  die Funktion  $F$  invertierbar sein.

Die oben besprochenen Rückführungen für den diskreten Fall lassen sich auch auf den kontinuierlichen Fall übertragen. So kann man eine nicht-autonome Differentialgleichung für  $f : T \rightarrow X$

$$\forall t \in T : f'(t) = F(f(t), t)$$

zurückführen auf eine autonome Gleichung für  $g : T \rightarrow X \times T$ . Eine Differentialgleichung der Ordnung  $k$  für  $f : T \rightarrow X$ ,

$$\forall t \in T : f^{(k)}(t) = F(f(t), f'(t), \dots, f^{(k-1)}(t)), \quad (5)$$

lässt sich auf eine Differentialgleichung erster Ordnung für  $g : T \rightarrow X^k$  zurückführen. Wie im Fall von diskreten Systemen bleibt Linearität im Allgemeinen nur bei der zweiten Rückführung erhalten.

### 1.3 Zusammenhang zwischen diskreten und kontinuierlichen Systemen

Es gibt mehrere Querverbindungen zwischen dem diskreten und dem kontinuierlichen Fall.

- Falls in einer autonomen Differentialgleichung Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems für  $f : \mathbb{R} \rightarrow X$

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = F(f(t))$$

erfüllt ist, haben wir für jede Schrittweite  $h > 0$  eine Funktion  $G : X \rightarrow X$ , sodass für alle  $t \in \mathbb{R}$  die Gleichung  $f(t + h) = G(f(t))$  gilt. Die Funktion  $G$  berechnet also den Wert nach Zeiteinheit  $h$  und stellt eine Diskretisierung der Differentialgleichung dar. Die Lösungen der Rekursion für  $g : \mathbb{N} \rightarrow X$ ,  $\forall t \in \mathbb{N} : g(t + 1) = G(g(t))$  sind Folgen  $(f(t_0), f(t_0 + h), f(t_0 + 2h), \dots)$  von Funktionswerten der Lösung der Differentialgleichung.

- Für kleine numerische Werte von  $h$  kann ein  $G$  wie oben approximativ berechnet werden. Auf diese Weise erhält man numerische Verfahren zum Auswerten von Lösungen von Anfangswertproblemen.
- Wenn die Lösungen einer Differentialgleichung bei 0 analytisch sind – das heißt alle Ableitungen bei 0 existieren und die Taylorreihe konvergiert in einem geeigneten Konvergenzbereich gegen die Funktion – dann bilden die Ableitungen bei 0 eine Folge. Diese Folge erfüllt eine Rekursion, die sich oft direkt aus der Differentialgleichung berechnen lässt.

- Umgekehrt kann man aus einer Folge, die eine Rekursion löst, eine Potenzreihe bilden und hoffen, dass die Potenzreihe konvergiert. Im positiven Fall erfüllt sie oft eine Differentialgleichung, die sich direkt aus der Rekursion ableiten lässt.
- Bei der qualitativen Beschreibung von Lösungen einer Differentialgleichung im Grenzwert  $t \rightarrow \infty$  gibt es eine wichtige Methode, die wir noch diskutieren werden: man bildet eine Durchschnittsmenge  $H \subset X$  und untersucht die Folge der Schrittpunkte einer Lösung mit dieser in der zeitlichen Reihenfolge. Diese Folge erfüllt ebenfalls eine Rekursion, und qualitative Eigenschaften dieser Rekursion hängen eng zusammen mit qualitativen Eigenschaften der zu untersuchenden Differentialgleichung.

**Aufgabe 1.1.** 1. Die geometrische Reihe kann rekursiv definiert werden als das System

$$\forall t \in \mathbb{N} : a(t+1) = q a(t), \quad s(t+1) = s(t) + a(t)$$

mit Startwerten  $a(0) = 1$  und  $s(0) = 0$ . Man schreibe das System als vektorwertige Rekursion in der Form  $(a, s)(t+1) = M \cdot (a, s)(t)$ .

2. Zeige, dass das resultierende System gelöst werden kann, in dem man für alle  $n \in \mathbb{N}$  den Ausdruck  $M^n$  berechnet. Überprüfe dies in dem damit die bekannte Formel der geometrischen Reihe hergeleitet wird.

**Aufgabe 1.2.** Sei  $X$  ein Vektorraum der Dimension  $d$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $F : X^k \times \mathbb{N} \rightarrow X$  eine lineare Abbildung in  $X^k$ . Zeige, dass die Menge der Lösungen

$$L = \{f : \mathbb{N} \rightarrow X \mid \forall t \in \mathbb{N} : f(t+k) = F(f(t), \dots, f(t+k-1), t)\}$$

ein Vektorraum der Dimension  $kd$  ist.

Hinweis: Zeige, dass die Abbildung  $\psi : L \rightarrow X^k$ ,  $f \mapsto (f(0), \dots, f(k-1))$  ein Isomorphismus von Vektorräumen ist.

**Aufgabe 1.3.** 1. Führe für  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ ,  $b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Differentialgleichung

$$f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 f'(t) + a_0 f(t) + b(t) = 0$$

auf eine Differentialgleichung erster Ordnung zurück.

2. Unter welchen Bedingungen an  $b$  ist das neue System linear?

**Aufgabe 1.4.** Führe folgende Differentialgleichung in eine mit niedrigerer Ordnung bzw. in expliziter Form über:

- für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f''(t)^2 - f'(t) + t^2 = 0$ ;
- für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , unbekannte Funktionen  $\alpha(t), \beta(t)$  sowie  $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$ :  $f'(t) = \alpha(t) f(t) + \beta(t) f(t)^r$ ;  
Hinweis: Betrachte  $g(t) := f(t)^{1-r}$ .
- für  $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi, \pi) : 2 \arctan(f'(t)) + f(t) = 0$ .

## 2 Stabilitätsanalyse von kontinuierlichen Systemen

Bevor wir uns konkreten Lösungsverfahren zuwenden, wollen wir versuchen, qualitativ etwas über die Lösung auszusagen, ohne die Lösung tatsächlich zu berechnen. Numerische und exakte Methoden zur Lösung werden später noch besprochen. Dazu betrachten wir zunächst den Spezialfall von skalaren autonomen Differentialgleichungen und Satz 2.2, welcher die allgemeine Definition motiviert.

### 2.1 Skalare autonome Differentialgleichungen

In diesem Kapitel betrachten wir den kontinuierlichen Zeitbereich  $T = \mathbb{R}$  und  $X \subset \mathbb{R}$ . Gegeben ist eine stetige Funktion  $F : T \rightarrow X$  und gesucht ist  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, sodass

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = F(f(t)) \quad (6)$$

gilt.

Das asymptotische Verhalten der Lösung wird durch das Vorzeichen von  $F$  bestimmt: wenn für ein  $t_0 \in T$  der Wert  $F(f(t_0))$  positiv bzw. negativ ist, dann ist eine Lösung bei  $t_0$  streng monoton steigend bzw. fallend. Wenn die Menge der Nullstellen von  $F$  diskret ist, können wir  $X$  unterteilen in offene Intervalle, in denen  $F$  positiv oder negativ ist; und deren Randpunkte, den Nullstellen.

Es sei zunächst  $x_0 \in X$  eine Nullstelle von  $F$ . Dann ist die konstante Funktion  $f : t \rightarrow x_0$  eine Lösung der Differentialgleichung. Mit den Begriffen, die im nächsten Abschnitt eingeführt werden, wird der Punkt  $x_0$  als “Gleichgewichtspunkt” oder “Equilibrium” bezeichnet.

**Beispiel 2.1.** Es sei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die “logistische Funktion”  $x \mapsto x(1-x)$ . Die entsprechende Differentialgleichung für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\forall t : f'(t) = f(t)(1 - f(t))$$

wird verwendet zur Beschreibung einer Population. Solange die Bevölkerung  $f(t)$  im Verhältnis zu 1 klein ist, ist die Änderungsrate proportional zu  $x$ . Wenn  $f(t)$  aber in die Nähe des Schwellwerts 1 kommt, wird das Wachstum kleiner und kann für  $f(t) > 1$  auch negativ werden.

Die Differentialgleichung besitzt genau zwei Equilibrien, also Werte bei denen die Bevölkerung konstant bleibt, nämlich  $f_1(t) = 0$  und  $f_2(t) = 1$ .

Ein wenig schwieriger, aber immer noch leicht zu verstehen, ist die Situation in folgendem Satz:

**Satz 2.2.** *Es sei  $x_0 \in X$  eine Nullstelle von  $F$ . Es sei  $(a, x_0)$  ein Intervall in dem  $F$  positiv ist ( $a = -\infty$  ist erlaubt). Es sei  $(x_0, b)$  ein Intervall in dem  $F$  negativ ist. Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der Differentialgleichung, sodass  $f(0) \in (a, b)$  ist. Dann gilt  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = x_0$  (insbesondere existiert der Grenzwert).*



*Beweis.* Wir definieren die Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto (f(t) - x_0)^2$ . Weil  $f$  differenzierbar ist – schließlich ist  $f$  eine Lösung der Differentialgleichung – ist auch  $g$  differenzierbar. Außerdem gilt für alle  $t$

$$g'(t) = 2f'(t)(f(t) - x_0) = 2F(f(t))(f(t) - x_0),$$

und dieser Wert ist in einer Umgebung von  $t = 0$  negativ: wenn nämlich  $(f(t) - x_0)$  positiv ist, ist  $F(f(t))$  negativ, und wenn  $(f(t) - x_0)$  negativ ist, ist  $F(f(t))$  positiv. Daher ist die Funktion bei 0 monoton fallend, das heißt der Abstand des Funktionswertes zum Equilibrium wird kleiner. Insbesondere ist  $f(t) \in (a, b)$ , und die Funktion  $g$  ist auf ganz  $\mathbb{R}_+$  monoton fallend. Daher ist auch  $f$  monoton steigend (im Fall  $f(0) < x_0$ ) oder monoton fallend (falls  $f(0) > x_0$ ). Daraus folgt auch, dass der Grenzwert  $x_1 := \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  existiert und in  $(a, b)$  liegt. Wir müssen noch zeigen, dass  $x_1 = x_0$  ist.

Da  $f$  bei  $x_1$  eine waagrechte Asymptote hat, gilt

$$0 = \lim_{t \rightarrow +\infty} f'(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} F(f(t)) = F(\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)) = F(x_1).$$

Also ist  $x_1$  eine Nullstelle von  $F$ . Wenn  $f(0) < x_0$ , dann ist  $x_1$  im Intervall  $[f(0), x_0]$ , und wenn  $f(0) \geq x_0$ , dann ist  $x_1$  im Intervall  $[x_0, f(0)]$ . In diesem Bereich gibt es aber nur eine einzige Nullstelle von  $F$  und die ist  $x_0$ .  $\square$

In Beispiel 2.1 sind die Voraussetzungen von Satz 2.2 für das Equilibrium  $x_0 = 1$  erfüllt. Daher konvergiert der Funktionswert für alle Startwerte in  $(0, \infty)$  gegen 1.

## 2.2 Stabile und Asymptotisch Stabile Equilibrien

In Satz 2.2 wird eine Situation beschrieben, die man gerne allgemein formulieren möchte: “stabile Equilibrien” sollten Umgebungen besitzen, sodass Lösungen mit Startwert in der Umgebung nicht mehr aus dieser Umgebung ausbrechen und schlussendlich gegen das Equilibrien konvergieren. Leider lässt sich so eine Umgebung, aus der es kein Entkommen mehr gibt, nicht immer (und wenn, dann auch nur schwer) nachweisen. Es erweist sich, dass man sich das Leben langfristig leichter macht, wenn man eine zusätzliche “Analysis-Klausel” in die Definition einbaut.

Es sei  $n > 0$  und  $X$  eine offene Menge in  $\mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in X$ . Es sei  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Richtungsfeld, welches ein kontinuierliches dynamisches System durch die Differentialgleichung  $\forall t : f'(t) = F(f(t))$  für  $f : \mathbb{R} \rightarrow X$  beschreibt.

**Definition 2.1.** Wenn  $F(x_0) = 0$  ist, dann nennen wir  $x_0$  ein *Equilibrium* für das dynamische System beschrieben durch  $F$ .

Wie schon erwähnt, ist für jedes Equilibrium  $x_0$  die konstante Funktion  $f(t) = x_0$  eine Lösung der Differentialgleichung mit Anfangswert  $x_0$ .

**Definition 2.2.** Es sei  $x_0$  ein Equilibrium. Wir nennen es ein *stabiles Equilibrium*, wenn für jede Umgebung  $U$  von  $x_0$  eine Umgebung  $V$  von  $x_0$  existiert, sodass für jede Lösung  $f$  der Differentialgleichung mit Startwert  $f(0) \in V$  und für alle  $t > 0$  gilt:  $f(t) \in U$ .

Ein Beispiel, bei dem die Analysis-Klausel schlagend wird ist folgendes dynamische System.

**Beispiel 2.3.** Betrachte das skalare dynamische System gegeben durch  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$F(t) = \begin{cases} t \sin(1/t) & \text{für } t \neq 0 \\ 0 & \text{für } t = 0. \end{cases}$$

Es lässt sich leicht zeigen, dass  $F$  stetig ist. Die Equilibrien sind 0 und alle Punkte der Form  $\frac{1}{k\pi}$  mit  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Für gerade  $k > 0$  und ungerade  $k < 0$  ist die Voraussetzung von Satz 2.2 erfüllt, und diese Equilibrien sind daher auch stabil.

Für gerade  $k < 0$  und ungerade  $k > 0$  haben wir eine zeitliche Umkehrung der Stabilität: die Lösungen in der Nähe driften vom Equilibrium weg. Diese sind also nicht stabil.

Das interessanteste Equilibrium ist der Nullpunkt. In jeder Umgebung der 0 befinden sich sowohl stabile als auch instabile Equilibrien von vorigem Typ. Jede nichtkonstante Lösung wird von einem stabilen Equilibrium eingefangen (dem zum Startwert nächsten). Für jede Umgebung  $U$  von 0 können wir daher eine Umgebung  $V$  angeben, sodass  $U$  sowohl  $V$  als auch alle Equilibrien enthält, die die Lösungen mit Startwert in  $V$  einfangen. Mit anderen Worten: 0 ist ein stabiles Equilibrium.

Der Begriff Stabilität drückt somit zwar das “Nicht-Ausbrechen” aus, aber nicht die Limes-Eigenschaft. Wir definieren daher zusätzlich:

**Definition 2.3.** Es sei  $x_0$  ein stabiles Equilibrium. Wir nennen es *asymptotisch stabil*, wenn eine Umgebung  $W$  von  $x_0$  existiert, sodass jede Lösung mit Startwert in  $W$  gegen  $x_0$  konvergiert.

Wenn die Voraussetzungen von Satz 2.2 erfüllt sind, handelt es sich sogar um ein asymptotisch stabiles Equilibrium, wie man sich leicht überlegen kann. In Beispiel 2.3 ist das stabile Equilibrium bei 0 nicht asymptotisch stabil: die Grenzwerte existieren zwar immer, sind aber in der Regel andere Equilibrien (solche mit ungeraden  $k$ ). Wir haben aber noch ein viel einfacheres Beispiel eines stabilen, aber nicht asymptotisch stabilen Equilibriums, nämlich für das Richtungsfeld  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto 0$ . Jeder Punkt ist ein Equilibrium, alle Equilibrien sind stabil, keines davon ist asymptotisch stabil.

**Bemerkung 2.4.** Oftmals ist  $F : T \rightarrow X \subset \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $x_0 \in X$  eine isolierte Nullstelle von  $F$  mit  $F'(x_0) \neq 0$ . In dieser Situation gibt es folgende zwei Möglichkeiten:

- Falls  $F'(x_0) < 0$ , dann sind die Voraussetzungen von Satz 2.2 für eine Umgebung von  $x_0$  erfüllt und  $x_0$  ist ein asymptotisch stabiles Equilibrium.
- Falls  $F'(x_0) > 0$ , dann ist  $x_0$  ein instabiles Equilibrium.

In der Mathematik ist man versucht Definitionen so allgemein als möglich zu halten. Bei der Definition der asymptotischen Stabilität könnte man meinen, dass die Voraussetzung der Stabilität überflüssig wäre: es könnte sein, dass aus der Aussage

es existiert eine Umgebung  $W$  von  $x_0$ , sodass jede Lösung mit Startwert in  $W$  gegen  $x_0$  konvergiert

schon die Stabilität von  $x_0$  folgt. Im Fall  $X \subset \mathbb{R}^1$  kann man zeigen, dass das tatsächlich der Fall ist: wenn die obige Aussage erfüllt ist, dann können sich die Nullstellen von  $F$  nicht bei  $x_0$  häufen, sonst hätte jede mögliche Umgebung  $W$  ein weiteres Equilibrium und damit eine Lösung, die nicht gegen  $x_0$  konvergiert. Die Voraussetzung von Satz 2.2 ist daher erfüllt, und damit haben wir Stabilität. Wir werden aber später zwei-dimensionale dynamische Systeme sehen, die ein Equilibrium besitzen, welches die obige Aussage erfüllt aber nicht stabil ist (und daher auch nicht asymptotisch stabil).

Das *Phasenportrait* ist eine graphische Darstellung eines dynamischen Systems, in dem die Bilder der einzelnen Lösungen als Kurven in  $X$  dargestellt werden, und die Durchlaufrichtung der Kurve mit einem Pfeil gekennzeichnet wird. Die Kurven bzw. Punkte (im Fall von Equilibrien) nennen wir auch *Bahnen*. Voraussetzung für das Erstellen des Phasenportraits sind die Eindeutigkeit (Bahnen sind disjunkt) und zumindest lokale Existenz (jeder Punkt hat eine Bahn) von Lösungen. Wenn die Voraussetzungen erfüllt sind, bilden die Bahnen eine Partition von  $X$ .

Im Fall  $X \subset \mathbb{R}^1$  kann man das Phasenportrait der Differentialgleichung für  $f : T \rightarrow X$ ,  $\forall t : f'(t) = F(f(t))$  zeichnen, wenn man die Nullstellen von  $F$  und das Vorzeichen des Wertes von  $F$  in den Intervallen zwischen den Nullstellen kennt. Die Nullstellen entsprechen konstanten Lösungen und werden als Punkte dargestellt. Die Intervalle sind ebenfalls Bilder von Lösungskurven. Die Richtung ist aufwärts in Intervallen, in denen  $F$  positiv ist, und abwärts in Intervallen, in denen  $F$  negativ ist.



Abbildung 1: Phasenportrait der logistischen Differentialgleichung  $f'(t) = f(t)(1 - f(t))$ . Der Bildraum besteht aus 5 Bahnen. Zwei davon sind Punkte, der Punkt 1 ist asymptotisch stabil.

## 2.3 Bifurkationen

Angenommen ein dynamisches System ist stetig von einem (oder mehreren) Parameter abhängig. Welchen Einfluss haben kleine Änderungen des Parameters auf Stabilitätseigenschaften der Equilibrien? Diese Fragestellung wird im Lauf der Vorlesung noch ausführlich behandelt. An dieser Stelle geben wir eine Vorschau auf den Begriff der Bifurkation mit einigen Beispielen.

Sei dazu  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(\lambda, x) \mapsto F(\lambda, x)$  eine stetige Funktion. Für ein fixes  $\lambda \in \mathbb{R}$  schreiben wir  $F_\lambda$  für die Funktion  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto F(\lambda, x)$ . Diese definiert die parameterabhängige Differentialgleichung für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : f'(t) = F_\lambda(f(t)).$$

**Beispiel 2.4.** Wir beginnen mit  $F_\lambda(x) = -x + \lambda$ . Dieses System hat für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  genau ein Equilibrium, und zwar bei  $\lambda$ . Die Voraussetzungen von Satz 2.2 sind erfüllt, also ist das Equilibrium asymptotisch stabil. Es ändert zwar die Position, aber der Typ bleibt unverändert, wenn man den Parameter ändert. Dieses Phänomen werden wir später als *strukturell stabil* bezeichnen.

**Beispiel 2.5.** (Sattelknoten) Das nächste Beispiel ist  $F_\lambda(x) = x^2 - \lambda$ . Für  $\lambda < 0$  gibt es kein Equilibrium. Für  $\lambda > 0$  existieren zwei Equilibrien, nämlich bei  $\pm\sqrt{\lambda}$ . Das Equilibrium bei  $-\sqrt{\lambda}$  ist asymptotisch stabil, das andere nicht. Im Grenzfall  $\lambda = 0$  haben wir ein Equilibrium, welches "halbseitig stabil" ist: Bahnen von unten konvergieren, Bahnen von oben nicht.

**Beispiel 2.6.** (transkritisch) Nun sei  $F_\lambda(x) = x(x - \lambda)$ . Hier gibt es für fast alle  $\lambda$  zwei Equilibrien bei 0 und bei  $\lambda$ , außer bei  $\lambda = 0$ , wo beide zusammenfallen. Beim Übergang von negativen zu positiven Parametern wechseln die Equilibrien den Typ: für negative  $\lambda$  ist das Equilibrium bei  $\lambda$  stabil und das bei 0 nicht. Für positive  $\lambda$  ist es umgekehrt.

Im *Bifurkationsdiagramm* verwenden wir  $\lambda$  und  $x$  als Koordinaten. Die Nullstelle von  $F$  in der  $(\lambda, x)$ -Ebene ist im Allgemeinen eine Kurve. Wir zeichnen die Teile der Kurve, die stabilen Equilibrien entsprechen, mit durchgehendem Strich, und die anderen Teile strichliert. Die Regel ist: wenn unterhalb eines Kurvenzweiges die Funktion  $F$  positiv ist und oberhalb negativ, dann wird dieser Teil durchgehend gezeichnet, sonst strichliert.

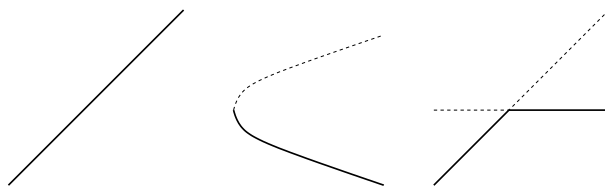


Abbildung 2: Bifurkationsdiagramme für die parameterabhängigen Differentialgleichungen  $f'(t) = -f(t) + \lambda$ ,  $f'(t) = f(t)^2 - \lambda$ ,  $f'(t) = f(t)(f(t) - \lambda)$ . Stabile Equilibrien sind durchgehend gezeichnet, die anderen strichliert.

**Aufgabe 2.1.** Man zeichne für  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  ein Phasenportrait der Differentialgleichung  $f'(t) = F(f(t))$  mit

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}} & \text{falls } x \neq 1 \\ -2 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

**Aufgabe 2.2.** Untersuche für unbekannte Parameter  $a, b \in \mathbb{R}$  die Equilibrien der vektorwertigen Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) (a - f_2(t)) \\ f_2(t) (b f_1(t) - 1) \end{pmatrix}.$$

Für die Werte  $a = 0, b = 0$  sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(0) \cdot e^{f_2(0) \cdot (e^{-t} - 1)} \\ f_2(0) \cdot e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass der Ursprung in diesem Fall ein stabiler Gleichgewichtspunkt ist.  
Hinweis: Nutze dazu direkt die Definition von Stabilität.

**Aufgabe 2.3.** Ein Equilibrium heißt *isoliert*, wenn es eine Umgebung besitzt, die keine weiteren Equilibrien enthält.

Es sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig. Es sei  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  ein stabiles Equilibrium. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (A)  $x_0$  ist ein asymptotisch stabiles Equilibrium.
- (B)  $x_0$  ist ein isoliertes Equilibrium.

**Aufgabe 2.4.** Gegeben sei die parameterabhängige Differentialgleichung

$$f'(t) = F_\lambda(f(t)) = f(t)(\lambda - f(t)^2),$$

wobei  $\lambda \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Zeichne das Phasenportrait für  $\lambda = 1$ .
2. Konstruiere das Bifurkationsdiagramm.

**Aufgabe 2.5.** Skizziere das Bifurkationsdiagramm für die parameterabhängige Differentialgleichung  $f'(t) = \lambda^2 - f(t)^3 - f(t)^2$  mit  $\lambda \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Hinweis: Versuche eine explizite Darstellung der Equilibrien zu vermeiden.

### 3 Lösungsverfahren

Es gibt Anekdoten von Mathematikern, die mit einem rechnerischen Problem konfrontiert werden, eine Nacht lang nachdenken und danach stolz verkünden: “ich habe gezeigt, dass eine Lösung existiert”. Meistens bleibt der Applaus aus, man erwartet sich oft mehr. Doch was genau heißt es eigentlich eine Gleichung zu lösen?

Ein eklatanter Fall ist die polynomiale Gleichung vierten Grades für  $x \in \mathbb{C}$ :

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

wobei  $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$  unbekannte Parameter sind. Nach dem Fundamentalsatz der Algebra existieren 4 Lösungen, die auch zusammenfallen können. Die Formel von Ferrari liefert einen Ausdruck für die Lösung, der neben den arithmetischen Operationen (+, −, ·, :) auch Wurzeln enthält. Die Wurzel ist im komplexen eine mehrdeutige Operation, und bei der richtigen Wahl der Auswertung bekommt man die 4 Lösungen.

Es besteht also kein Zweifel, dass die Formel von Ferrari die obige Gleichung vollständig löst. Andererseits wird die Formel aus zwei Gründen kaum zur numerischen Berechnung der Lösungen verwendet. Erstens ist die Formel kompliziert und die Wurzeln sind im komplexen nicht leicht auszuwerten (zu Ferraris Zeiten verwendete man dazu Winkelfunktionen). Zweitens steht ein einfaches numerisches Näherungsverfahren zur Verfügung, das schnell konvergiert, nämlich das Newton-Verfahren. Ist dann nicht die Newton-Methode gemeinsam mit dem Fundamentalsatz der Algebra, der die Existenz und Anzahl der Lösungen garantiert, eine bessere “Lösung” als Ferraris Formel?

Im Fall von dynamischen Systemen ist nicht eine Zahl, sondern eine Funktion gesucht. Das macht das Verständnis des Lösungsbegriffes nicht gerade einfacher. Wenn wir uns die Option einer numerischen Lösung offenhalten wollen, liegt folgende Definition nahe: *eine Differentialgleichung für  $f$  ist gelöst, wenn wir zu einem gegebenen Anfangswert  $f(0)$  und zu einer gegebenen Stelle  $\tau$  die Zahl  $f(\tau)$  berechnen können, sei es mit einer Formel oder mit einem numerischen Näherungsverfahren.*

Wenden wir die gleiche Definition auch für die Rekursionen an, dann ist die Rekursion selbst schon eine Lösung, weil sie als rekursiver Algorithmus gelesen werden kann.

Für Differentialgleichungen ist die Sache nicht so einfach. Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$  und  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wir wollen die Differentialgleichung

$$\forall t : f'(t) = F(f(t))$$

für  $f : \mathbb{R} \rightarrow X$  lösen. Sei  $\tau > 0$ . Im Eulerschen Polygonzugverfahren wählen wir zunächst  $N \in \mathbb{N}$  – je größer  $N$ , desto höher ist der Rechenaufwand, aber wir erwarten auch eine höhere Genauigkeit – und unterteilen das Intervall  $[0, \tau]$  in  $N$  Teilintervalle der Länge  $h := \frac{\tau}{N}$ . Dann definieren wir eine Rekursion für  $g_N : \mathbb{N} \rightarrow X$  mittels

$$\forall t : g_N(t+1) = g_N(t) + hF(g_N(t)),$$

hoffend, dass die rechte Seite in  $X$  liegt. Ist dies nicht der Fall, bricht das Verfahren mit einer Fehlermeldung ab (das kann nicht passieren wenn  $X = \mathbb{R}^n$  ist). Als Startwert

setzen wir  $g_N(0) = f(0)$ , den gegebenen Startwert von  $f$ . Und für alle  $i \geq 0$  ist  $g_N(i)$  ein Näherungswert für  $f(hi)$ .

Zwei schwerwiegende Einwände muss man an dieser Stelle machen. Erstens ist nicht garantiert, dass überhaupt ein Lösung  $f$  mit dem gegebenen Startwert existiert. Zweitens, selbst wenn die Lösung existiert und eindeutig ist, dann ist auch nicht klar, ob  $\lim_{N \rightarrow \infty} g_N(N)$  existiert und gleich  $f(\tau)$  ist. Beide Fragen werden an späterer Stelle noch behandelt.

### 3.1 Symbolische Lösungen

Es gibt auch unzählige Beispiele bei denen Lösungsformeln einfacher und schneller auswertbar sind als numerische Verfahren. Das Entwickeln von Algorithmen zum Berechnen von Lösungsformeln ist Aufgabe der mathematischen Disziplin "Symbolisches Rechnen". Es ist natürlich nicht so, dass immer eine Lösungsformel existiert. Ob das so ist, hängt von der Sprache ab, die man vorher definieren muss und die genau festlegt was eine Formel ist. Ein berühmtes Beispiel aus der Algebra ist die allgemeine Gleichung fünften Grades für  $x \in \mathbb{C}$ :

$$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,$$

wobei  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$  gegeben sind. Abel/Ruffini/Galois haben gezeigt, dass es keine Lösungsformel gibt, die aus den arithmetischen Operationen und Wurzeloperationen besteht.

Ein oft verwendeter Begriff einer Formel ist die Menge der elementaren Funktionen: eine Funktion einer Teilmenge von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C}$  heißt elementar, wenn sie sich ausdrücken lässt durch arithmetische Operationen, Exponentialfunktionen und Logarithmen (Wurzelfunktionen können sich durch Exponentialfunktionen und Logarithmen ausdrücken lassen). Diese Klasse von Funktionen ist relativ eingeschränkt, und viele Gleichungen sind mit diesem Formelbegriff unlösbar, etwa Gleichungen, die auf polynomiale Gleichungen höheren Grades führen. Auch Integrationsprobleme und damit Differentialgleichungen sind manchmal unlösbar, wie zum Beispiel die Gleichung

$$\forall t : f'(t) = e^{t^2}. \tag{7}$$

für  $f$ . Die elementare Funktion  $t \mapsto e^{t^2}$  hat keine elementare Stammfunktion.

Ein Satz von Liouville gibt Aufschluss darüber, wie Stammfunktionen einer elementaren Funktion aussehen können, sofern sie existieren. Wir verzichten in dieser Vorlesung auf die exakte, technisch aufwändige, Formulierung und geben hier nur eine vage Idee:

**Satz 3.1.** *Es sei  $f$  eine elementare Funktion und  $F$  eine elementare Stammfunktion. Dann treten als Argumente von Exponentialfunktionen in  $F$  nur solche Ausdrücke auf, die auch schon als Argumente von Exponentialfunktionen in  $f$  auftreten; und als Argumente von Logarithmen in  $F$  treten entweder Ausdrücke auf, die auch schon als Argumente von  $f$  in Logarithmen auftreten, oder in  $f$  im Nenner eines Bruches stehen. In letztem Fall ist  $F$  eine lineare Funktion von diesem Logarithmus.*

Der Beweis des Satzes von Liouville ist konstruktiv. Er liefert einen Algorithmus, der entscheidet, ob eine gegebene elementare Funktion eine Stammfunktion hat, und berechnet diese im positiven Fall.

Ein wichtiger Spezialfall ist die Unterklasse der rationalen Funktionen, also Funktionen, die sich nur durch arithmetische Operationen darstellen lassen. Diese haben immer elementare Stammfunktionen, und nach dem Satz von Liouville treten nur Logarithmen von Faktoren des Nenners und keine Exponentialfunktionen auf. Mit Hilfe der Methode der Partialbruchzerlegung kann eine elementare Stammfunktion berechnet werden (siehe Skriptum für Analysis).

Würde man die Sprache erweitern und zusätzlich zu arithmetischen Operationen, Exponentialfunktion und Logarithmus auch noch unbestimmte Integrale zulassen und Funktionen, die sich in dieser Sprache schreiben lassen, etwa “intelementare Funktionen” nennen, dann hat man natürlich überhaupt kein Problem, die Gleichung (7) zu lösen:  $f(x) = \int e^{x^2} dx$ . Allgemein hat jede intelementare Funktion  $g$  eine intelementare Stammfunktion, nämlich  $\int g(x) dx$ .

### 3.2 Trennung der Variablen

Es seien  $T \subset \mathbb{R}$  und  $X \subset \mathbb{R}$  Intervalle,  $a : X \rightarrow \mathbb{R}^*$  und  $b : T \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen (zur Erinnerung: wenn  $K$  ein Körper ist, dann ist  $K^*$  die Menge aller Elemente ungleich 0). Wir lösen die nichtautonome Differentialgleichung für  $f : T \rightarrow X$

$$\forall t \in T : f'(t) = \frac{b(t)}{a(f(t))} \quad (8)$$

durch Rückführung auf Integration und Funktionsumkehrung.

Es seien  $A := \int a$  und  $B := \int b$  Stammfunktionen von  $a$  und  $b$ . Da  $A'(x) \neq 0$  für alle  $x \in X$  gilt, ist  $A : X \rightarrow Y$  invertierbar, wobei  $Y$  die Bildmenge von  $A$  ist.

**Satz 3.2.** *In der Notation wie oben ist  $A^{-1} \circ B$  eine Lösung. Umgekehrt läßt sich jede Lösung schreiben als  $t \mapsto A^{-1}(B(t) + c)$  für eine geeignete Zahl  $c \in \mathbb{R}$ .*

*Beweis.* Es sei  $h$  eine differenzierbare Funktion von  $T$  nach  $X$ . Dann ist  $h$  genau dann eine Lösung der Differentialgleichung, wenn

$$(A \circ h)' = (A' \circ h) \cdot h' = (a \circ h) \cdot \frac{b}{a \circ h} = b$$

ist, also genau dann wenn  $A \circ h$  eine Stammfunktion von  $b$  ist (zum Beispiel  $B$ ). □

Man beachte, dass die Lösung  $g = A^{-1} \circ B$  nicht in ganz  $T$  definiert sein muss: damit  $g$  beim Wert  $t$  definiert ist, muss  $B(t)$  in  $Y$  liegen (dem Definitionsbereich von  $A^{-1}$ ). Wenn zusätzlich zur Differentialgleichung eine Anfangsbedingung  $f(t_0) = x_0$  gegeben ist, wobei  $t_0 \in T$  und  $x_0 \in X$  ist, dann ist die Konstante  $c = A(x_0) - B(t_0)$  eindeutig festgelegt. Wenn also überhaupt eine Lösung existiert, dann ist diese eindeutig.



**Bemerkung 3.1.** Es gibt Beispiele, bei denen das Anfangswertproblem keine Lösung hat, die auf ganz  $T$  definiert ist (siehe etwa Aufgabe 3.1). Wenn  $T$  und  $X$  offen sind, dann gibt es aber lokal immer eine Lösung, d.h. es existiert eine Umgebung von  $t_0$ , auf der die Lösung definiert ist.

*Beweis:* In der Notation von zuvor: Damit die Lösung

$$t \mapsto A^{-1}(B(t) + A(x_0) - B(t_0))$$

für  $t$  definiert ist, muss  $B(t) + A(x_0) - B(t_0)$  in  $Y$  liegen. Für  $t = t_0$  ist das der Fall. Nachdem  $A$  streng monoton und  $X$  offen ist, ist  $Y = A(X)$  ebenfalls offen. Es sei

$$V := \{y - A(x_0) + B(t_0) \mid y \in Y\}.$$

Diese Menge ist auch offen und weil  $B$  stetig ist, ist das Urbild  $U := B^{-1}(V)$  wieder offen. Da  $B(t_0) \in V$ , ist  $U$  eine offene Umgebung von  $t_0$ . Für  $t \in U$  ist  $B(t) \in V$  und daher  $B(t) + A(x_0) - B(t_0) \in Y$ .

Zwei wichtige Spezialfälle von Gleichungen der Form (8) sind der autonome Fall und der lineare Fall. Im autonomen Fall ist  $X = \mathbb{R}$ ,  $t_0 = 0$ , und  $b$  die konstante Funktion 1. Im Anfangswertproblem bei der allgemeinen autonomen Differentialgleichung für  $f$

$$\forall t : f'(t) = F(f(t))$$

können wir daher zwei Fälle unterscheiden: entweder ist  $F(f(0))$  ungleich 0, dann können wir die Methode TdV anwenden. Oder  $F(f(0)) = 0$ , dann existiert auf jeden Fall eine konstante Lösung. In Aufgabe 3.1 sehen wir, dass die Lösung im zweiten Fall nicht eindeutig sein muss.

Im Fall einer linearen Gleichung ist  $X = \mathbb{R}$  und (8) von der Form

$$\forall t : f'(t) = b(t)f(t).$$

Wenn der Startwert  $f(x_0) \neq 0$  ist, dann verkleinern wir  $X$  auf  $\mathbb{R}^*$ , setzen  $a : X \rightarrow \mathbb{R}$  als  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  und erhalten die allgemeine Lösung

$$f(t) = e^{B(t)+c} = c_1 e^{B(t)}.$$

Wenn man die Stammfunktion  $B$  gleich  $t \mapsto \int_{t_0}^t b(s)ds$  setzt, dann ist  $c_1$  gleich dem Startwert  $x_0$ . Die Lösung ist auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert und hat keine Nullstellen.

Wenn der Startwert  $f(x_0) = 0$  ist, erhält man die konstante Lösung  $f(t) = 0$ . Diese ist auch die einzige Lösung mit diesem Startwert, da alle anderen Lösungen keine Nullstellen haben.

Es kann passieren, dass eine gegebene Differentialgleichung nach einer geeigneten Substitution auf die Form (8) gebracht werden kann, wie die der sogenannten *Euler-homogenen*

*Differentialgleichung.* Es sei dazu  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und die Differentialgleichung für  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  von der Form

$$\forall t : f'(t) = F\left(\frac{f(t)}{t}\right).$$

Nach der Substitution  $g(t) = t f(t)$  erhält man eine Differentialgleichung für  $g$ , für die TdV angewendet werden kann (siehe Aufgabe 3.3).

Hier noch ein Trick, der hilft, TdV anzuwenden ohne die Formel auswendig zu lernen. Er besteht aus Umformungen der Differentialgleichung in Pseudo-Gleichungen, die zwar mit einem Gleichheitszeichen ausgestattet sind, aber deren Seiten nicht immer sinnvolle mathematische Ausdrücke sind:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{b(t)}{a(f(t))} \\ \frac{df}{dt} &= \frac{b(t)}{a(f)} \\ a(f)df &= b(t)dt \\ \int a(f)df &= \int b(t)dt \\ A(f) &= B(t) + c \\ f &= A^{-1}(B(t) + c) \end{aligned}$$

Die Voraussetzung  $A'(x) \neq 0$  für alle  $x \in X$  und der Definitionsbereich  $T$  sollte dabei aber weiterhin beachtet werden.

### 3.3 Reduktion der Ordnung

Wir betrachten nun autonome Differentialgleichungen zweiter Ordnung und führen diese auf Differentialgleichungen erster Ordnung, im Allgemeinen nicht autonom, zurück. Für diese gibt es zumeist keine symbolische Lösung, aber in manchen Fällen lässt sich TdV anwenden. Es sei  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Differentialgleichung

$$\forall t : f''(t) = F(f(t), f'(t))$$

gegeben. Wir nehmen an, dass  $f'(t_0) \neq 0$  ist. Dann ist  $f$  lokal invertierbar und es existiert eine Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $U$  eine Umgebung von  $f(t_0)$  ist, mit  $f'(t) = g(f(t))$  wann immer die rechte Seite definiert ist. Wir leiten nun beide Seiten der Gleichung  $f'(t) = g(f(t))$  ab und verwenden die Differentialgleichung:

$$F(f(t), g(f(t))) = F(f(t), f'(t)) = f''(t) = g'(f(t))f'(t) = g'(f(t))g(f(t)).$$

In dieser Gleichung kommt  $t$  nur als Argument von  $f$  vor. Wir setzen  $s := f(t)$  und erhalten

$$F(s, g(s)) = g'(s)g(s).$$

Diese Differentialgleichung für  $g$  kann eventuell mittels TdV gelöst werden, zum Beispiel wenn  $F$  nicht von der zweiten Variable abhängt. Um  $f$  zu finden, muss in einem zweiten Schritt noch die Gleichung  $f'(t) = g(f(t))$  gelöst werden, wobei hier erneut TdV angewandt werden kann.

Wenn man von einer linearen Differentialgleichung eine Lösung kennt, kann man die Ordnung ebenfalls reduzieren. Es sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $T \subset \mathbb{R}$ , und  $a_0, \dots, a_{k-1} : T \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Falls für die Differentialgleichung für  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : f^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)f^{(k-1)}(t) + \dots + a_1(t)f'(t) + a_0(t)f(t) = 0 \quad (9)$$

eine Lösung  $f_1 : T \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $T$  keine Nullstellen hat, bekannt ist, ersetzen wir  $f(t)$  durch  $f_1(t)g(t)$  und berechnen eine Differentialgleichung für  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ . Nach Anwenden der Produktregel und Ausmultiplizieren aller Klammern werden alle Terme weggekürzt, in denen  $g$  nicht abgeleitet wird. Das Ergebnis ist eine lineare Differentialgleichung der Ordnung  $k - 1$  für  $g' : T \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir führen die Rechnung durch für den Fall  $k = 2$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (f_1g)'' + a_1(f_1g_1)' + a_0f_1g_1 = (f_1g' + f_1'g)' + a_1f_1g' + a_1f_1'g_1 + a_0f_1g = \\ &= f_1g'' + 2f_1'g' + f_1''g + a_1f_1g' + a_1f_1'g_1 + a_0f_1g = (f_1'' + a_1f_1' + a_0f_1)g + f_1g'' + 2f_1'g' + a_1f_1g' = \\ &= f_1g'' + 2f_1'g' + a_1f_1g'. \end{aligned}$$

Nachdem  $f_1$  keine Nullstellen hat, erhält man nach Division durch  $f_1$  und der Substitution  $h(t) = g'(t)$  eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für  $h$ , bei der TdV angewandt werden kann. Ist die allgemeine Lösung  $h$  gefunden, erhält man  $f$  nach Integration von  $h$  und anschließender Multiplikation mit  $f_1$ .

Auch wenn man keine Lösung kennt, kann man die Ordnung reduzieren, erhält dann allerdings eine nichtlineare Differentialgleichung. Wir nehmen an, es existiert eine Lösung  $f$  ohne Nullstellen, und führen die Substitution  $g = \frac{f'}{f}$  mit  $g : T \rightarrow \mathbb{R}$  durch. Wenn  $g$  gefunden wurde, kann  $f$  durch TdV berechnet werden.

Zum Auffinden der Gleichung für  $g$  stellen wir die Ableitungen von  $f$  in der Form  $f$  mal einem Ausdruck in  $g$  und seinen Ableitungen dar:

$$f = f \cdot 1$$

$$f' = f \cdot g$$

$$f'' = f'g + fg' = fg^2 + fg' = f \cdot (g^2 + g')$$

$$f''' = (f \cdot (g^2 + g'))' = f'(g^2 + g') + f(g^2 + g')' = fg(g^3 + g') + f(2gg' + g'') = f \cdot (g^3 + g'' + 3gg')$$

*usw.*

Ersetzt man in Gleichung (9) alle Ableitungen von  $f$  durch die rechten Seiten obiger Gleichungen und dividiert durch  $f$ , erhält man die Gleichung für  $g$ . Im Fall  $k = 2$  lautet das Ergebnis

$$g' + g^2 + a_1g + a_0 = 0,$$

welche als *Riccati-Differentialgleichung* bezeichnet wird. Weil die Rückführung auch umgekehrt funktioniert, kann man auch eine gegebene Riccati-Differentialgleichung auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung reduzieren. Errät man eine Lösung, kann man diese Differentialgleichung wie oben beschrieben lösen.

### 3.4 Variation der Konstanten

Die Methode der Variation der Konstanten gibt es in zwei Variationen, für vektorwertige Differentialgleichungen erster Ordnung und für skalare beliebiger Ordnung. Sie dient zur Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung unter der Annahme, dass die allgemeine Lösung der dazugehörigen homogenen Gleichung schon bekannt ist. Im skalaren Fall für Ordnung 1 kann man bekanntlich die homogene Gleichung mit TdV lösen, also hat man durch Teamwork von TdV und VdK ein allgemeines Lösungsverfahren für inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Auch für autonome Differentialgleichungen werden wir Lösungsverfahren für den homogenen Fall angeben, und daher sind auch alle inhomogenen Differentialgleichungen lösbar, bei denen der lineare Anteil nicht von  $t$  abhängt.

Der vektorwertige Fall ist einfacher zu erklären, darum fangen wir damit an. Es sei  $T \subset \mathbb{R}$  ein reelles Intervall,  $n \in \mathbb{N}$ . Es sei  $A : T \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  eine matrixwertige stetige Funktion und  $b : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine vektorwertige Funktion. Wir lösen die inhomogene Differentialgleichung für  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\forall t \in T : f'(t) - A(t)f(t) = b(t) \quad (10)$$

unter der Annahme, dass wir das Anfangswertproblem der homogenen Gleichung für  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\forall t : g'(t) - A(t)g(t) = 0$$

für jeden Anfangswert bei der Anfangsstelle  $t_0 \in T$  lösen können. Die Annahme ist äquivalent zu der, dass wir eine Matrix  $B$  kennen, die die Matrix-Differentialgleichung

$$\forall t : B'(t) = A(t)B(t)$$

und die Anfangsbedingung  $B(t_0) = I_n$  erfüllt; die Matrix  $B(t)$  ist jene lineare Abbildung, die jedem Anfangswert  $v_0 \in \mathbb{R}^n$  den Funktionswert  $g(t)$  der Lösung zuordnet.

Alles das setzt natürlich voraus, dass das Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung hat; auch das werden wir später für beliebige lineare Differentialgleichungen zeigen. Eine weitere Folgerung aus diesem (später zu zeigenden) Satz ist, dass die Matrix  $B(t)$  für alle  $t \in T$  invertierbar ist. Um das zu zeigen, wählen wir  $t_1 \in T$  beliebig, und zeigen dass  $B(t_1)$  invertierbar ist, indem wir eine inverse Matrix angeben. Die Inverse von  $B(t_1)$  ist die Matrix  $B_1(t_0)$ , wobei  $B_1(t)$  der linearen Abbildung entspricht, die jedem Anfangswert  $v_1$  bei  $t_1$  den Wert  $f(t)$  der eindeutigen Lösung mit Anfangswert  $f(t_1) = v_1$  zuordnet – mit anderen Worten, die Funktion  $B_1$  ist die Lösung der Matrix-Differenzialgleichung oben, nur mit einer anderen Anfangsbedingung  $B_1(t_1) = I_n$ .

Mit dem Ansatz  $f(t) = B(t)h(t)$  mit  $h : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  für die inhomogenen Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} b(t) &= (B(t)h(t))' - A(t)B(t)h(t) = B(t)h'(t) + B'(t)h(t) - A(t)B(t)h(t) \\ &= B(t)h'(t) + (B'(t) - A(t)B(t))h(t) = B(t)h'(t), \end{aligned}$$

oder equivalent dazu

$$(B(t))^{-1}b(t) = h'(t).$$

Die Funktion  $h$  kann nun durch Integration gefunden werden. Um eine Lösung für die Gleichung für  $f$  zu finden, muss noch mit der Matrixfunktion  $B$  multipliziert werden.

Wir wenden uns dem skalaren Fall beliebiger Ordnung zu. Es sei  $T \subset \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $a_0, \dots, a_{k-1}, b : T \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Wir lösen folgende Differentialgleichung für  $f : T \rightarrow \mathbb{R}$

$$f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + \dots + a_1f' + a_0f = b. \quad (11)$$

Wir nehmen an, dass wir  $k$  linear unabhängige Lösungen  $g_1, \dots, g_k$  der homogenen Gleichung für  $g$

$$g^{(k)} + a_{k-1}g^{(k-1)} + \dots + a_1g' + a_0g = 0$$

schon kennen. An dieser Stelle könnten wir die Gleichung (11) schon auf zwei Arten lösen:

- Zurückführen auf die vektorielle Gleichung erster Ordnung wie in (10) und VdK.
- Zurückführen auf eine homogene lineare Gleichung der Ordnung  $k + 1$ , dann  $k$  mal Reduktion der Ordnung mit den bekannten Lösungen um eine lineare Gleichung erster Ordnung zu erhalten, bei der man schlussendlich TdV anwendet.

Im ersten Fall hat man eine matrixwertige Funktion zu invertieren. Im wesentlichen läuft es darauf hinaus, ein  $k \times k$  Gleichungssystem für unbekannte Funktionen zu lösen. Was wir jetzt machen, ist, dieses Gleichungssystem ohne Umwege hinzuschreiben.

Wir suchen Funktionen  $h_1, \dots, h_k : T \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass deren Ableitungen  $h'_1, \dots, h'_k$  die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} g_1h'_1 + \dots + g_kh'_k &= 0 \\ g'_1h'_1 + \dots + g'_kh'_k &= 0 \\ g''_1h'_1 + \dots + g''_kh'_k &= 0 \\ &\vdots \\ g_1^{(k-2)}h'_1 + \dots + g_k^{(k-2)}h'_k &= 0 \\ g_1^{(k-1)}h'_1 + \dots + g_k^{(k-1)}h'_k &= b \end{aligned}$$

Die Matrix, die der linken Seite dieses Gleichungssystems entspricht, ist genau die Matrix  $B$  (eigentlich: matrixwertige Funktion) in der vektorwertigen Differentialgleichung, auf die

man die Gleichung (11) reduzieren kann. Deshalb ist die Matrix auch für alle  $t \in T$  invertierbar, und das Gleichungssystem kann nach  $h'_1, \dots, h'_k$  aufgelöst werden. Die Funktionen  $h_1, \dots, h_k$  können nun durch Integration gefunden werden.

Das Gleichungssystem ist nun gerade so gewählt, dass mit  $f := g_1 h_1 + \dots + g_k h_k$  Folgendes gilt.

$$\begin{aligned} f &= g_1 h_1 + \dots + g_k h_k \\ f' &= g'_1 h_1 + \dots + g'_k h_k \\ f'' &= g''_1 h_1 + \dots + g''_k h_k \\ &\dots \\ f^{(k-2)} &= g_1^{(k-2)} h_1 + \dots + g_k^{(k-2)} h_k \\ f^{(k-1)} &= g_1^{(k-1)} h_1 + \dots + g_k^{(k-1)} h_k + b \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit  $a_0$ , die zweite mit  $a_1$  usw. (letzte Zeile mit 1) und summieren alles auf. Das Ergebnis ist – nach einigen Umformungen unter Verwendung der Annahme, dass  $g_1, \dots, g_k$  die homogene Gleichung lösen – gleich  $b$ . Also erfüllt  $f$  die Differentialgleichung.

**Beispiel 3.3.** Gegeben sei für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  die inhomogene Differentialgleichung

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = 2f(t) + 1 + t^2, \quad f(0) = -1.$$

Die homogene Gleichung  $f'(t) = 2f(t)$  lässt sich mittels TdV lösen. In der Notation von (8):

$$b(t) = 1, a(x) = \frac{1}{2x}, \text{ daher } B(t) = t, A(x) = \frac{\ln(x)}{2},$$

wobei  $a(x) \neq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt. Die homogene Lösung ist daher

$$h(t) = A^{-1}(B(t) + c) = e^{2t+c} = c_1 e^{2t}.$$

Mit dem Ansatz  $f(t) = c_1(t) e^{2t}$ , eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung, erhalten wir

$$c'_1(t) e^{2t} = 1 + t^2,$$

oder equivalent dazu,  $c'_1(t) = (1 + t^2)e^{-2t}$ . Integriert ergibt das  $c_1(t) = \frac{-(2t^2+2t+3)e^{-2t}}{4} + c$  und

$$f(t) = c_1(t) e^{2t} = \frac{-(2t^2 + 2t + 3)}{4} + c e^{2t}.$$

Nach Auswertung und Einarbeitung des Anfangswertes erhalten wir noch  $c = \frac{-1}{4}$ .

**Bemerkung 3.2.** In der Literatur wird oftmals beschrieben, dass sich eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (10) durch die Lösung der homogenen Gleichung plus einer speziellen Lösung berechnen lässt. Wir haben im Beispiel oben das gleiche Ergebnis bekommen, als wir in der Integration von  $B'(t)$  eine Unbestimmte additiv eingeführt haben.

**Bernoulli-Differentialgleichung.** Es sei  $T \subset \mathbb{R}$ ,  $a, b : T \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen und  $n \in \mathbb{N}$ . Die Differentialgleichung für  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^*$

$$\forall t \in T : f'(t) + a(t)f(t) + b(t)f(t)^n = 0$$

ist für  $n \neq 0, 1$  zwar nicht linear, aber sie lässt sich durch die Substitution  $f(t) = g(t)^{\frac{1}{1-n}}$  auf eine lineare Gleichung für  $g$  zurückführen:

$$0 = \left(g^{\frac{1}{1-n}}\right)' + ag^{\frac{1}{1-n}} + bg^{\frac{n}{1-n}} = \frac{1}{1-n}g^{\frac{n}{1-n}}g' + agg^{\frac{n}{1-n}} + bg^{\frac{n}{1-n}}$$

Nach Herausheben von  $g^{\frac{n}{1-n}}$  erhält man die inhomogene lineare Differentialgleichung für  $g$

$$\frac{g'(t)}{1-n} + a(t)g(t) + b(t) = 0.$$

Diese kann man mit VdK und TdV lösen. Ist  $g$  bekannt, erhält man  $f$  durch die obige Substitution.

**Symbolische Methoden im diskreten Fall.** Die Frage der Lösbarkeit mit symbolischen Methoden macht auch für Rekursionen Sinn. Wir werden zum Beispiel im nächsten Abschnitt eine symbolische Lösung für lineare autonome Rekursionen angeben. Für nicht-autonome oder nichtlineare Rekursionen gibt es viele Resultate, aber auch offene Fragen. Führende Experten auf diesem Gebiet arbeiten auf der JKU (Kauers, Paule, Schneider, Koutschan).

### 3.5 Unlösbarkeitsresultate

Ähnlich zur Galois-Theorie in der Algebra kann man für eine gegebene lineare Differentialgleichung mit Hilfe der *Picard-Vessiot-Theorie* entscheiden, ob sich die allgemeine Lösung als intelementare Funktion schreiben lässt. Also, ob sich die Lösung zurückführen lässt auf Integration, Logarithmus, und Exponentialfunktion. “Im Prinzip” deshalb, weil der Algorithmus für Ordnung größer als 2 ziemlich kompliziert und rechenaufwändig ist; es gibt auch keine vollständige Implementierung.

Auf jeden Fall weiß man von einigen Differentialgleichungen, dass die allgemeine Lösung nicht intelementar ist. Die einfachsten sind die Airy-Differentialgleichung für  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : a''(t) - ta(t) = 0$$

und die Besselsche Differentialgleichung für  $b : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : t^2b''(t) + tb'(t) + (t^2 - \lambda^2)b(t) = 0,$$

wobei  $\lambda$  ein reeller Parameter ist, sodass  $\lambda - \frac{1}{2}$  nicht ganzzahlig ist. Falls  $\lambda - \frac{1}{2}$  ganzzahlig ist, ist die Lösung sogar elementar.

Für allgemeine (nichtlineare) Differentialgleichungen gibt es keine vergleichbare Theorie. Gelingt es nicht die Gleichung zu lösen oder auf eine lineare Gleichung zurückzuführen, dann hat man keine Möglichkeit festzustellen, ob die Lösung intelementar ist oder nicht.

**Aufgabe 3.1.** 1. Man zeige, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$\forall t \in T : f'(t) = f(t)^2, f(0) = x_0 \neq 0$$

nicht auf  $T = \mathbb{R}$  definiert sein kann.

2. Zeige, dass es neben der konstanten Lösung auch noch eine nicht-konstante Lösung des Anfangswertproblems

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'(t) = \sqrt{f(t)}, f(0) = 0$$

gibt.

**Aufgabe 3.2.** Man gebe die allgemeine Lösung folgender Differentialgleichungen für  $f : T \rightarrow X$  mit geeigneten  $T, X \subset \mathbb{R}$  an:

1.  $f'(t) = \frac{-t}{f(t)}$

2.  $f'(t) = e^{t^2+f(t)}$

3.  $f'(t) = \frac{\sin(2t)}{\cos(t)} - f(t) \sin(t)$

**Aufgabe 3.3.** 1. Zeige, dass sich Euler-homogene Differentialgleichungen nach der Transformation  $g(t) = f(t)/t$  mittels Trennung der Variablen lösen lassen.

2. Löse für  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  die Differentialgleichung

$$f'(t) = \frac{f(t)^2}{t^2} + \frac{f(t)}{t}.$$

**Aufgabe 3.4.** 1. Zeige, dass sich Differentialgleichungen der Form  $f'(t) = F(at + bf(t) + c)$  mit  $a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0$  für  $f : \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}$  nach der Transformation  $g(t) = at + bf(t) + c$  mittels TdV lösen lassen.

2. Löse für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  die Differentialgleichung

$$f'(t) = (t + f(t))^2.$$

**Aufgabe 3.5.** Löse für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  das Anfangswertproblem

$$(1 - t^2)f''(t) + 2tf'(t) - 2f(t) = 6(1 - t^2)^2, f(0) = 1, f'(0) = 0.$$

**Aufgabe 3.6.** Eine Population lässt sich mittels der Anfangswertprobleme

$$P'(t) = \gamma P(t) - \tau P(t)^3, P(0) = P_0$$

bzw.

$$P'(t) = \gamma \sqrt{P(t)} - \tau P(t), P(0) = P_0$$

mit  $\gamma, \tau, P_0 > 0$  modellieren. Löse die Bernoullische Differentialgleichungen und berechne die Populationsentwicklungen für  $t \rightarrow \infty$ .



## 4 Lineare Autonome Systeme

In diesem Kapitel behandeln wir den Spezialfall von linearen autonomen Rekursionen bzw. linearen autonomen Differentialgleichungen. Das erlaubt uns die Anwendung von linearer Algebra und ermöglicht eine vollständige Beschreibung des Lösungsraumes.

### 4.1 Lineare Autonome Rekursionen

In diesem Kapitel ist  $T = \mathbb{N}$ ,  $X = \mathbb{R}^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  eine Matrix, und die Rekursion für  $f : T \rightarrow X$  gegeben durch

$$f(t+1) = Af(t). \quad (12)$$

Die allgemeine Lösung ist  $f(t) = A^t v$  mit einem beliebigen Anfangswert  $v = f(0)$ . Wir interessieren uns für das Verhalten von  $f(t)$  für große  $t$ .

Was im kontinuierlichen Fall die Equilibrien sind, sind im diskreten Fall die *Fixpunkte* – im linearen Fall der Nullvektor und die Eigenvektoren zu 1, die zu konstanten Folgen führen. Für manche andere Eigenwerte – nämlich für komplexe Einheitswurzeln – bekommen wir Zyklen, d.h., periodische Lösungsfunktionen. Die Definition von Stabilität und asymptotischer Stabilität sind die gleichen wie in Definition 2.2 und in Definition 2.3, man braucht nur das Wort “Equilibrium” durch das Wort “Fixpunkt” ersetzen.

Sei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k > 1$ . Ein *k-Zyklus* der Rekursion (12) ist eine Lösung  $f(t)$ , die

$$\forall t \in T : f(t+k) = f(t)$$

erfüllt. Wir können die Begriffe *Stabilität* und *asymptotische Stabilität* auch auf *k-Zyklen* erweitern. Dazu verwenden wir die Tatsache, dass die *k-Zyklen* den Fixpunkten der Rekursion für  $g : T \rightarrow X$ ,

$$g(t+1) = A^k g(t),$$

entsprechen. Ein (*asymptotisch*) *stabiler k-Zyklus* entspricht einem (asymptotisch) stabilen Fixpunkt von  $A^k$ .

**Beispiel 4.1.** Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Ein *n-Eck* ist gegeben durch eine Folge von *n* Punkten  $(p_1, \dots, p_n) \in (\mathbb{R}^2)^n$ . Durch Anwendung der Vorschrift “ersetze jeden Punkt durch den Mittelpunkt seiner Nachbarpunkte” erhalten wir ein neues *n-Eck*. Diese Vorschrift kann als lineare Abbildung

$$F : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow (\mathbb{R}^2)^n, (p_1, \dots, p_n) \mapsto \left( \frac{p_n + p_2}{2}, \frac{p_1 + p_3}{2}, \dots, \frac{p_{n-1} + p_1}{2} \right)$$

geschrieben werden. Die zugehörige Abbildungsmatrix ist eine Blockmatrix bestehend aus  $2 \times 2$  Blöcken, und zwar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}I_2 & \dots & \frac{1}{2}I_2 \\ \frac{1}{2}I_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}I_2 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Wir iterieren die Abbildung und beobachten, was mit dem  $n$ -Eck passiert. Dazu verwenden wir das Programm <http://www.risc.jku.at/people/jschicho/dg/ngon.py>.

**n=3.** Eine Iteration liefert ein ähnliches Dreieck mit halber Seitenlänge, das auf den Kopf gestellt ist. Iterieren wir die Abbildung, so werden die Dreiecke immer kleiner und konvergieren gegen den Schwerpunkt.

Die Eigenwerte sind  $+1$  mit Vielfachheit 2 und  $\frac{-1}{2}$  mit Vielfachheit 4. Der dominierende Eigenwert ist  $+1$ , darum wird bei fortgesetzter Iteration die Dreiecke auf den Eigenraum zu  $+1$  projiziert. Der ist gegeben durch  $p_1 = p_2 = p_3$ , und die Projektion auf diesen Eigenraum ist das entartete Dreieck, bei dem alle 3 Punkte im Schwerpunkt zusammenfallen. Diese entarteten Dreiecke sind Fixpunkte; sie sind stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

Der Eigenraum zu  $\frac{-1}{2}$  ist die Menge aller Dreiecke mit Schwerpunkt  $(0,0)$ . Das ist der Grund für die Beobachtung, dass die Dreiecke bei jedem Schritt auf die Hälfte verkleinert und auf den Kopf gestellt wird.

**n=4.** Die erste Iteration liefert ein entartetes Viereck mit  $p_1 = p_3$  und  $p_2 = p_4$ . Ab der zweiten passiert nichts mehr, scheinbar ist eine konstante Folge erreicht worden. Im Programm wird allerdings nicht gezeigt, dass die Punkte vertauscht werden, das heißt, in Wahrheit haben wir einen 2-Zyklus  $(p_1, p_2, p_1, p_2), (p_2, p_1, p_2, p_1)$ . Dieser 2-Zyklus ist stabil, aber nicht asymptotisch stabil.

Die Matrix hat die Eigenwerte  $1$  (Vielfachheit 2),  $0$  (Vielfachheit 4), und  $-1$  (Vielfachheit 2). Der Eigenraum zum Eigenwert  $0$  wird nach einer Iteration gleich wegprojiziert. Die Summe der beiden anderen Teilräume ist genau die Menge aller Vierecke mit  $p_1 = p_3$  und  $p_2 = p_4$ . Zweimalige Anwendung der Abbildung, eingeschränkt auf diese Menge, ist die Identität, darum der 2-Zyklus.

**n=5.** Die Matrix hat wieder den Eigenwert  $1$  mit Vielfachheit 2 (das gilt übrigens für alle  $n$ ). Der Eigenraum ist, vergleichbar mit dem Fall des Dreiecks, die Menge aller Fünfecke, bei denen alle Punkte zusammenfallen.

Wir beschränken uns auf den Orthogonalraum, also der Menge aller Fünfecke mit Schwerpunkt  $(0,0)$ . Es gibt zwei Eigenwerte, nämlich  $\lambda_1 := \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \approx 0.3$  und  $\lambda_2 := \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \approx -0.8$ , beide mit Vielfachheit 4. Der Eigenraum zu  $\lambda_1$  ist die Menge aller affinen Bilder eines regelmäßigen Fünfecks. Der Eigenraum zu  $\lambda_2$  ist das affine Bild einer anderen Figur, die man leicht sehen kann, wenn man die Abbildung oft genug iteriert und ab und zu vergrößert: weil dieser Eigenwert betragsmäßig der größere ist, setzt sich diese Figur immer mehr durch. Weil  $\lambda_2 < 0$  ist, wird die Figur bei jeder Iteration auf den Kopf gestellt.

Es ist klar, dass das asymptotische Verhalten von  $A^t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , von den Eigenwerten von  $A$  abhängt. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass sich  $A$  schreiben lässt als  $A = BJB^{-1}$ , wobei  $B$  invertierbar und  $A$  eine Jordan-Normalform ist. Für alle  $t$  gilt

$$A^t = (BJB^{-1})^t = BJB^{-1}BJB^{-1}BJ \dots JB^{-1} = BJ^tB^{-1},$$

also genügt es das asymptotische Verhalten von Jordan-Normalformen zu untersuchen. Sieht man sich die Formeln für die Potenzen von Jordan-Blöcken an, so sieht man, dass

alle Einträge von der Form  $\binom{t}{k}\lambda^{t-k}$  sind (sofern sie nicht Null sind), wobei  $\lambda$  der Eigenwert in der Diagonale des Blocks und  $k$  eine natürliche Zahl kleiner als die Größe des Blocks ist. Dieser Term  $\binom{t}{k}\lambda^{t-k}$  konvergiert für  $|\lambda| < 1$  gegen 0; für  $|\lambda| = 1$  und  $k = 0$  ist der Term beschränkt; in allen anderen Fällen ist der Term unbeschränkt.

Für die Potenzen der Matrizen sind daher die folgenden Fälle möglich.

- Alle Eigenwerte haben Betrag kleiner als 1. Dann gilt  $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = \mathbf{0}$ .
- Alle Eigenwerte haben Betrag kleiner oder gleich 1, und die Jordan-Blöcke, die zu den Eigenwerten mit Betrag 1 gehören, sind 1-Blöcke. Dann ist die Folge der Matrizen  $(A^t)_{t \in \mathbb{N}}$  beschränkt.
- In allen anderen Fällen ist die Folge  $(A^t)_{t \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt.

**Satz 4.2.** a) Wenn die Folge  $(A^t)_{t \in \mathbb{N}}$  gegen 0 konvergiert, dann ist der Nullvektor ein asymptotisch stabiler Fixpunkt.

b) Wenn die Folge  $(A^t)_{t \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist, dann ist der Nullvektor ein stabiler Fixpunkt.

c) Wenn die Folge  $(A^t)_{t \in \mathbb{N}}$  unbeschränkt ist, dann ist der Nullvektor nicht stabil.

*Beweis.* In allen 3 Fällen verwenden wir die Formel  $f(t) = A^t v_0$  für die Lösung  $f(t)$  der Rekursion (12).

b) Wenn die Folge der Matrixpotenzen beschränkt ist, dann ist auch

$$K := \{A^t v \mid t \in \mathbb{N}, \|v\| < 1\}$$

beschränkt. Es sei  $R$  eine obere Schranke für den Maximalbetrag von Elementen in  $K$ . Multiplikation mit beliebigen Potenzen von Faktoren kann den Betrag eines Vektors höchstens ver- $R$ -fachen. Es sei  $U$  eine offene Umgebung von  $\mathbf{0}$ . Dann suchen wir eine Kugel von Radius  $\epsilon > 0$ , die in  $U$  enthalten ist, und wählen  $V$  als Einheitskugel von Radius  $\frac{\epsilon}{R}$ . Jede Folge mit Startwert in  $U$  bleibt dann in  $V$ .

a) Wenn  $\lim_{t \rightarrow \infty} A^t = \mathbf{0}$  gilt, dann ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$  unabhängig vom Startwert  $v_0$ . Das zeigt den Zusatz "asymptotisch".

c) Angenommen, der Nullvektor sei stabil. Wir wählen  $U := \{v \mid \|v\| < 1\}$ . Wegen der Stabilität existiert eine offene Umgebung  $V$  von  $\mathbf{0}$ , sodass Lösungen mit Startwert in  $V$  immer in  $U$  bleiben. Es sei  $\epsilon$  der Radius einer Kugel mit Mittelpunkt  $\mathbf{0}$ , die in  $V$  enthalten ist. Dann kann Multiplikation mit beliebigen Matrizen den Betrag eines Vektors höchstens mit dem Faktor  $\frac{1}{\epsilon}$  multiplizieren. Daraus folgt, dass die Folge der Potenzen von  $A$  beschränkt ist bezüglich der Norm

$$M \mapsto \|M\|_{op} := \sup_{v, \|v\| < 1} \|Mv\|.$$

Daraus folgt, dass  $f$  beschränkt ist durch diese Schranke  $\frac{1}{\epsilon}$  mal der Norm von  $v_0$ . □

Wir wenden uns dem skalaren Fall höherer Ordnung zu: gegeben sind  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ . Gesucht ist eine Folge  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , die die Rekursion

$$\forall t : f(t+k) + a_{k-1}f(t+k-1) + \dots + a_1f(t+1) + a_0f(t) = 0 \quad (13)$$

erfüllen. Die Funktion ist durch  $k$  Anfangswerte  $f(0), \dots, f(k-1)$  eindeutig bestimmt. Ein klassisches Beispiel ist die Fibonacci-Rekursion  $k=2$ ,  $a_1 = a_0 = -1$ . Die Lösung mit Anfangswerten  $f(0) = 0, f(1) = 1$  ist die Fibonacci-Folge  $(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$ .

Um das asymptotische Verhalten zu untersuchen (und nebenbei auch eine geschlossene Lösungsformel für die Rekursion zu finden), reduzieren wir auf den vektoriellen Fall erster Ordnung und erhalten die folgende Rekursion für  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\forall t \in \mathbb{N} : g(t+1) = Ag(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{k-1} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Die Matrix  $A$  ist die Begleitmatrix des Polynoms  $X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ . Dieses Polynom heißt auch das “*charakteristische Polynom* der Rekursion (13)”.

Wir werden ein wenig später zeigen, dass das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom der Begleitmatrix mit dem charakteristischen Polynom der Rekursion übereinstimmen. Aus der Gleichheit von Minimalpolynom und charakteristischem Polynom folgt, dass alle Jordan-Blöcke maximale Größe haben, oder equivalent dazu, dass alle Eigenräume eindimensional sind.

Um die Jordan-Normalform verwenden zu können, lassen wir auch komplexe Lösungen zu, also Funktionen von  $\mathbb{N}$  nach  $\mathbb{C}$ .

Der Lösungsraum der Rekursion (13) wird von den Einträgen der ersten Zeile in der matrixwertigen Funktion  $t \mapsto A^k$  erzeugt. Diese sind wiederum erzeugt von den Einträgen der matrixwertigen Funktion  $t \mapsto J^k$ , wobei  $J$  eine Jordan-Normalform von  $A$  ist. Diese Einträge kennen wir bereits: ein Eigenwert  $\lambda \neq 0$  von Vielfachheit  $m$  führt zu Einträgen  $t \mapsto \binom{t}{i} \lambda^{t-i}$ ,  $i = 0, \dots, m-1$ . Im Fall  $\lambda = 0$  sind die Einträge gleich  $\delta_0, \dots, \delta_{m-1}$ , wobei

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist. Insgesamt sind das  $k$  Funktionen, also genau die Dimension des erzeugten Vektorraums. Sie sind linear unabhängig und bilden daher eine Basis für den Lösungsraum.

**Beispiel 4.3.** Das charakteristische Polynom der Fibonacci-Rekursion ist  $X^2 - X - 1$ , mit den Nullstellen  $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.62$  und  $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0.62$ . Die allgemeine Lösung der Rekursion ist

$$f(t) = c_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^t + c_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Mit den Anfangswerten  $f(0) = 0$  und  $f(1) = 1$  bekommt man  $c_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,  $c_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ . Für große  $t$  wird der zweite Summand sehr klein. Da die Fibonacci-Zahlen ganzzahlig sind, liegt der erste Summand sehr nahe bei einer ganzen Zahl.

Im obigen Beispiel sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms reell. Wenn die Nullstellen nicht reell sind, dann sind die Basislösungen oben auch nicht reellwertig, sondern komplexwertig. Es tritt aber zu jeder nichtreellen Nullstelle auch die konjugiert komplexe Zahl als Nullstelle mit der gleichen Vielfachheit auf. Damit hat man zu jeder nichtreellwertigen Basislösung  $g$  eine konjugiert komplexe Basislösung  $\bar{g}$ . Durch komplexe Linearkombination

$$h_1 = \frac{g + \bar{g}}{2}, h_2 = \frac{g - \bar{g}}{2i}$$

kann man zwei reelle Lösungen finden, die den gleichen Vektorraum wie  $g, \bar{g}$  erzeugen. Wenn man das für alle nichtreellen Basislösungen macht, kann man dadurch eine Basis von reellwertigen Lösungen erzeugen.

**Beispiel 4.4.** Die Rekursion für  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : g(t+2) + g(t+1) + g(t) = 0$$

hat das charakteristische Polynom  $X^2 + X + 1$  mit den Eigenwerten  $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3)$  und  $\frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \cos(2\pi/3) - i \sin(2\pi/3)$ . Die komplexwertigen Basislösungen sind

$$f_1(t) = (\cos(2\pi/3) + i \sin(2\pi/3))^t = \cos(2t\pi/3) + i \sin(2t\pi/3),$$

$$f_2(t) = (\cos(2\pi/3) - i \sin(2\pi/3))^t = \cos(2t\pi/3) - i \sin(2t\pi/3).$$

(Hier haben wir die Formel von de Moivre für die Potenzen von komplexen Zahlen verwendet.) Als reelle Basisfunktionen findet man daher  $f_3(t) = \cos(2t\pi/3)$ ,  $f_4(t) = \sin(2t\pi/3)$  und die allgemeine reellwertige Lösung ist

$$f(t) = c_1 \cos(2t\pi/3) + c_2 \sin(2t\pi/3).$$

Beim asymptotischen Verhalten von Folgen, die durch lineare autonome Rekursionen definiert werden, können wir folgende Möglichkeiten feststellen.

- Wenn alle Eigenwerte Betrag kleiner als 1 haben, dann konvergiert jede Lösungsfolge gegen 0, und 0 ist ein asymptotisch stabiler Fixpunkt.
- Wenn alle Eigenwerte Betrag kleiner gleich 1 haben und wenn alle Eigenwerte mit Betrag 1 einfach sind, dann ist jede Lösung beschränkt. 0 ist ein stabiler Fixpunkt.
- Wenn ein Eigenwert Betrag größer als 1 hat oder wenn ein Eigenwert mit Betrag 1 und Vielfachheit größer als 1 existiert, dann gibt es unbeschränkte Lösungen. 0 ist ein instabiler Fixpunkt. Die Lösungen wachsen aber höchstens exponential, d.h., es existieren Konstanten  $C, Q \in \mathbb{R}$ , sodass  $\forall t \in \mathbb{N} : f(t) < CQ^t$  gilt.

Zum Beweis reduziert man auf den vektorwertigen Fall erster Ordnung und verwendet Satz 4.2, sowie die Tatsache, dass die Größe der Jordan-Blöcke von Begleitmatrizen gleich der Vielfachheit des zugehörigen Eigenwerts ist.

Erwähnt sei noch eine Deutung des charakteristischen Polynoms, die wir im nächsten Kapitel benötigen werden. Es sei  $\mathcal{F}$  die Menge aller Funktionen  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  (bzw. aller Folgen in  $\mathbb{R}$ ), die höchstens exponentiell wachsen. Diese Menge bildet mit gliedweiser Addition und Skalarmultiplikation einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Die Funktion

$$S : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, f \mapsto (t \mapsto f(t+1))$$

heißt Shift-Operator: sie schmeißt das erste Folgenglied weg, und alle anderen rücken um 1 nach. Sei nun  $P \in \mathbb{R}[X]$  ein normiertes Polynom vom Grad  $k$ ,  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{k-1}X^{k-1} + X^k$ . Wir definieren den linearen Operator

$$P(S) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}, f \mapsto a_0f + a_1S(f) + \dots + a_{k-1}S^{k-1}(f) + S^k(f).$$

Die linke Seite der Rekursion (13) ist gleich dem  $t$ -ten Glied der Folge  $P(S)(f)$ , und  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann eine Lösung wenn sie im Kern von  $P(S)$  ist. Das charakteristische Polynom einer Rekursion liefert also genau jenes Polynom, in das man den Shift-Operator einsetzen muss, um die linke Seite der Rekursionsgleichung zu erhalten.

**Satz 4.5.** *Das charakteristische Polynom der Rekursion (13) ist gleichzeitig das Minimalpolynom und das charakteristische Polynom der Matrix  $A$  in der Rekursion (14).*

*Beweis.* Es sei  $f \in \mathcal{F}$ . Wir definieren die Prolongation

$$\rho(f) = (f, S(f), S^2(f), \dots, S^{k-1}(f)) \in \mathcal{F}^k.$$

Die Funktion  $f$  erfüllt die Gleichung  $A \cdot \rho(f) = S(\rho(f))$  genau dann, wenn  $f$  eine Lösung der Rekursion (13) ist (wir haben die Matrix gerade so definiert, sodass diese beiden Rekursionen equivalent sind).

Es sei  $M \in \mathbb{R}[X]$  das Minimalpolynom der Matrix  $A$ . Für alle Polynome  $P \in \mathbb{R}[X]$  und für jede Lösung  $f$  gilt die Gleichung

$$P(A)(\rho(f)) = \rho(P(S)(f)).$$

Das kann für Monome durch Induktion gezeigt werden und für beliebige Polynome folgt es dann aus der Linearität der Gleichung. Daher ist für jede Lösung  $f$  der Rekursion

$$\mathbf{0} = M(A) \cdot \rho(f) = \rho(M(S)(f)).$$

Der erste Eintrag dieser vektoriellen Gleichung ist  $M(S)(f) = 0$ . Das ist aber eine Rekursion der Ordnung  $k' := \deg(M)$ . Da der Lösungsraum der Rekursion (13) Dimension  $k$  hat, muss  $k = k'$  gelten. Es folgt, dass Minimalpolynom und charakteristisches Polynom der Matrix gleich sind.

Nachdem das charakteristische Polynom  $Q$  der Rekursion (13) ebenfalls ein Polynom von Grad  $k$  ist und für alle Lösungen  $f$  auch  $Q(S)(\rho(f)) = \mathbf{0}$  gilt, sind alle drei Polynome gleich.  $\square$

## 4.2 Lineare Autonome Differentialgleichungen

In diesem Kapitel beginnen wir mit dem skalaren Fall höherer Ordnung. Gegeben sind  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ . Gesucht ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sodass

$$\forall t : f^{(k)}(t) + a_{k-1}f^{(k-1)}(t) + \dots + a_1f'(t) + a_0f(t) = 0 \quad (15)$$

gilt. Beim Anfangswertproblem (AWP) sind zusätzlich noch  $f(0), f'(0), \dots, f^{(k-1)}(0) \in \mathbb{R}$  vorgegeben. Das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung (15) ist das Polynom  $X^k + a_{k-1}X^{k-1} + \dots + a_1X + a_0$ .

Ähnlich wie im diskreten Fall definieren wir die Menge  $\mathcal{D}$  aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , die bezüglich punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ein reeller Vektorraum ist. Der Operator  $D : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  ist definiert als die Ableitung. Wie im diskreten Fall können wir dann die Differentialgleichung auch schreiben als

$$P(D)(f) = 0,$$

wobei die Null auf der rechten Seite die Nullfunktion ist und  $P$  das charakteristische Polynom ist.

Mit der Methode des Potenzreihenansatzes werden wir eine Lösung des AWP konstruieren und zeigen, dass es keine andere Lösung geben kann, die an der Stelle 0 *analytisch* ist. Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt analytisch an einer Stelle  $t_0 \in \mathbb{R}$ , wenn es eine Potenzreihe  $\sum_{n \geq 0} c_n(t - t_0)^n$  gibt, die auf einer Umgebung von  $t_0$  gegen  $f(t_0)$  konvergiert. Wie sich leicht zeigen lässt (siehe Aufgabe 4.4), stimmt für analytische  $f$  diese Potenzreihe mit der Taylorreihe von  $f$  überein.

Für  $f$  differenzierbar und analytisch an der Stelle 0 bezeichnen wir mit  $\text{tay}(f)$  die Folge  $(f^{(r)}(0))_{r \in \mathbb{N}}$ . Man kann zeigen, dass diese Folge höchstens exponentiell wächst, also  $\text{tay}(f) \in \mathcal{F}$  gilt (siehe Aufgabe 4.4). Wenn umgekehrt  $c = (c_r)_{r \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathcal{F}$  ist, dann ist der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{r=0}^{\infty} c_r \frac{t^r}{r!}$  gleich  $+\infty$ . Wir wollen die Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ , die durch diese überall konvergente Potenzreihe definiert ist, mit  $\text{pow}(c)$  bezeichnen.

Nun folgt sofort, dass die Funktionen  $\text{tay} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{F}$  und  $\text{pow} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{D}$  invers zueinander sind, d.h. es gilt

- $\forall c \in \mathcal{F} : \text{tay}(\text{pow}(c)) = c;$
- $\forall f \in \mathcal{D}$  analytisch bei 0 :  $\text{pow}(\text{tay}(f)) = f.$

In folgendem Satz zeigen wir, dass die Menge der Lösungen der Differentialgleichung 15 gleich dem  $\text{pow}$ -Bild der Menge der Lösungen der Rekursion mit dem selben charakteristischen Polynom ist.

**Satz 4.6.** *Es sei  $k \in \mathbb{N}$  und  $P \in \mathbb{R}[X]$  ein normiertes Polynom vom Grad  $k$ . Dann ist der Kern von  $P(D)$  gleich dem  $\text{pow}$ -Bild des Kerns von  $P(S)$ .*

*Beweis.* Weil man Potenzreihen innerhalb des Konvergenzbereichs gliedweise differenzieren kann, ist  $\text{pow} \circ S = D \circ \text{pow}$ . Durch Induktion nach  $r$  zeigt man

$$\text{pow} \circ S^r = \text{pow} \circ S^{r-1} \circ S = D^{r-1} \circ \text{pow} \circ S = D^{r-1} \circ D \circ \text{pow} = D^r \circ \text{pow},$$

und wegen der Linearität von  $\text{pow}$  gilt daher  $\text{pow} \circ P(S) = P(D) \circ \text{pow}$ . Sei  $f \in \mathcal{D}$  analytisch. Dann ist  $f$  genau dann in  $\ker(P(D))$ , wenn  $\text{tay}(f)$  im Kern von  $\text{pow} \circ P(S) = P(D) \circ \text{pow}$  ist; da der kern von  $\text{pow}$  Null ist, genau dann wenn  $\text{tay}(f)$  in  $\ker(P(S))$  ist.  $\square$

Wir berechnen die Potenzreihen der Basislösungen zu einer Nullstelle  $\lambda$  des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda \neq 0: \text{pow} \left( \left( \binom{m}{i} \lambda^{m-i} \right)_{m \in \mathbb{N}} \right) (t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\binom{m}{i} \lambda^{m-i} t^m}{m} = \frac{t^i e^{\lambda t}}{i}$$

$$\lambda = 0: \text{pow}(\delta_i)(t) = t^i$$

Den konstanten Faktor  $\frac{1}{i}$  können wir vernachlässigen. Hat  $\lambda$  die Vielfachheit  $r$ , so sind die Basislösungen

$$t \mapsto e^{\lambda t}, t \mapsto t e^{\lambda t}, \dots, t \mapsto t^{r-1} e^{\lambda t},$$

unabhängig davon, ob  $\lambda$  Null ist oder nicht. Ist  $\lambda$  nicht reell, also  $\lambda = a + bi$  mit  $b \neq 0$ , dann ersetzen wir die komplexen Basislösungen

$$t \mapsto t^k e^{(a+bi)t}, t \mapsto t^k e^{(a-bi)t}$$

durch die reellen Lösungen

$$t \mapsto t^k \frac{e^{(a+bi)t} + e^{(a-bi)t}}{2} = t^k e^{at} \cos(bt), t \mapsto t^k \frac{e^{(a+bi)t} - e^{(a-bi)t}}{2i} = t^k e^{at} \sin(bt).$$

Mit diesen Basislösungen können wir das Stabilitätsverhalten des Equilibriums beim Nullvektor analysieren.

**Satz 4.7.** *Wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms Realteil kleiner als 0 haben, dann ist 0 ein asymptotisch stabiles Equilibrium.*

*Wenn die Nullstellen des charakteristischen Polynoms Realteil kleiner gleich 0 haben und die Nullstellen mit Realteil Null einfach sind, dann ist 0 ein stabiles Equilibrium.*

*In allen anderen Fällen ist 0 ein instabiles Equilibrium.*

*Beweis.* Die Funktion  $t \mapsto t^k e^{\lambda t}$  ist für  $\Re(\lambda) > 0$  und für  $\Re(\lambda) = 0, k \geq 1$ , unbeschränkt, für  $\Re(\lambda) = 0, k = 0$ , beschränkt, und für  $\Re(\lambda) < 0$  konvergent mit Grenzwert 0. Daraus folgt die Behauptung ähnlich wie im diskreten Fall.  $\square$

**Beispiel 4.8.** Es sei  $a \geq 0$  und  $b > 0$ . Die Gleichung für  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t: f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$$



heißt *Schwingungsgleichung*. Sie beschreibt die Schwingung eines Federpendels oder die Dynamik eines elektrischen Schwingkreises bestehend aus einem Kondensator, einer Spule und einem Widerstand. Das charakteristische Polynom ist  $X^2 + aX + b$  mit den Nullstellen  $\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ ,  $\lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$ .

Im Fall von  $a^2 - 4b \neq 0$  ist  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  und die Basislösungen lauten

$$t \mapsto e^{\lambda_1 t}, \quad t \mapsto e^{\lambda_2 t}.$$

Für  $a^2 - 4b > 0$  sind  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Für  $a^2 - 4b < 0$  wenden wir die Umformung auf

$$t \mapsto e^{\frac{-a}{2}t} \cos(\sqrt{-a^2/4 + b}t), \quad t \mapsto e^{\frac{-a}{2}t} \sin(\sqrt{-a^2/4 + b}t)$$

an.

Im Fall von  $a^2 - 4b = 0$  ist  $\lambda_1 = \lambda_2 = -a/2$  und wir erhalten die Basislösungen

$$t \mapsto e^{\frac{-a}{2}t}, \quad t \mapsto t e^{\frac{-a}{2}t}.$$

### 4.3 Matrixexponential

Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Differentialgleichung

$$\forall t : f'(t) = A f(t)$$

gegeben. Wegen  $f^{(k)}(0) = A^k f(0)$  erhält man mittels Potenzreihenansatz die analytischen Lösung

$$f(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A^r t^r}{r!} f(0).$$

Die matrixwertige Funktion  $t \mapsto e^{At} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A^r t^r}{r!}$ , die zu jedem Anfangswert die Auswertung der Lösung an der Stelle  $t$  liefert, heißt *Matrixexponential* von  $A$ . Folgenden Gesetze gelten für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und  $s, t \in \mathbb{R}$ :

1.  $\frac{d e^{At}}{dt} = A e^{At} = e^{At} A$ .
2.  $e^{As} e^{At} = e^{A(s+t)}$ .
3. Wenn  $AB = BA$ , dann ist  $e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt} = e^{Bt} e^{At}$ .
4. Wenn  $B$  invertierbar ist, dann ist  $e^{BAB^{-1}t} = B e^{At} B^{-1}$ .

Die letzte Identität können wir verwenden, um die Exponentialmatrix mit der Darstellung in Jordan-Normalform zu berechnen. Für Jordan Blockmatrizen

$$J_r = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}$$

lässt sich das Matrixexponential leicht berechnen:

$$e^{J_r t} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \frac{t^2}{2!} e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} & t e^{\lambda t} & \cdots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} e^{\lambda t} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Das Matrixexponential von Jordan-Normalformen ist eine blockweise Anwendung der Formel oben. Für beliebige Matrizen  $A = BJB^{-1}$  erhalten wir  $e^{At} = Be^{Jt}B^{-1}$ .

Für das asymptotische Verhalten spielt das Matrixexponential eine ähnliche Rolle wie die Folge der Matrixpotenzen im diskreten Fall. Die entscheidende Eigenschaft für die Eigenwerte ist aber nicht, ob der Betrag kleiner als 1 ist, sondern ob der Realteil kleiner als Null ist, denn genau dann konvergiert die Exponentialfunktion  $t \mapsto e^{\lambda t}$  gegen Null.

**Satz 4.9.** *Wenn alle Eigenwerte von  $\lambda$  negativen Realteil haben, dann ist der Nullvektor ein asymptotisch stabiles Equilibrium.*

*Wenn alle Eigenwerte von  $\lambda$  nichtpositiven Realteil haben und wenn die Jordan-Blöcke zu Eigenwerten mit Realteil Null alle  $1 \times 1$ -Blöcke sind, dann ist der Nullvektor ein stabiles Equilibrium.*

*In allen anderen Fällen ist der Nullvektor ein instabiles Equilibrium.*

Der Beweis ist ähnlich wie im diskreten Fall.

**Beispiel 4.10.** Die Schwingungsgleichung aus Beispiel 4.8 mit  $a, a^2 - 4b \neq 0$  kann auf die Differentialgleichung

$$\forall t : g'(t) = A g(t), \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} = B \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) B^{-1},$$

wobei

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ b & b \end{pmatrix},$$

zurückgeführt werden. Das Matrixexponential von  $A$  lautet daher

$$e^{At} = B e^{\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2)t} B^{-1} = \frac{1}{ab} \begin{pmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ b & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & -\lambda_1 \\ -b & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

und die erste Komponente von  $e^{At} \cdot \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \end{pmatrix}$  ist

$$f(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (a f(0)(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) + 2 f'(0)(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) + (\lambda_2 - \lambda_1) f(0)(e^{\lambda_2 t} + e^{\lambda_1 t})).$$

## 4.4 Eine Alternative zu VdK

Es sei  $P \in \mathbb{R}[X]$  ein normiertes Polynom vom Grad  $k$ . Bei der linearen inhomogenen Differentialgleichung für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\forall t : P(D)(f)(t) = b(t), \quad (16)$$

wobei  $b$  eine gegebene stetige Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  ist, kennen wir aus dem vorigen Kapitel eine Basis des Lösungsraums der homogenen Gleichung. Mit VdK könnte man nun die inhomogene Gleichung lösen. Dazu müssen ein  $k \times k$  Gleichungssystem mit Funktionen-Koeffizienten und  $k$  Integrale gelöst werden.

Wenn die rechte Seite  $b$  selbst eine Lösung einer linearen autonomen Differentialgleichung ist, zum Beispiel  $Q(D)(b) = 0$  für ein Polynom  $Q \in \mathbb{R}[X]$  vom Grad  $l \in \mathbb{N}$ , kann alternativ der Operator  $Q(D)$  auf beide Seiten von (16) angewendet werden und man erhält eine homogene autonome Gleichung der Ordnung  $k + l$ :

$$Q(D)P(D)(f) = (QP)(D)(f) = \mathbf{0}.$$

Hier verwenden wir zusätzlich, dass das Einsetzen von  $D$  in ein Polynom ein Ringhomomorphismus ist. Die Basis für den Kern von  $(QP)(D)$  ist bekannt, wobei in den  $k + l$  Basisfunktionen die  $k$  Basisfunktionen von  $P(D)$  enthalten sind. Mittels der restlichen  $l$  Funktionen setzen wir eine allgemeine Linearkombination in (16) ein. Durch Koeffizientenvergleich bekommen wir ein Gleichungssystem, welches gelöst werden kann, um die spezielle Lösung von (16) zu erhalten. Die allgemeine Lösung ist nun die Addition der speziellen und der allgemeinen Lösung des homogenen Gleichungssystems. Zusammengefasst: es werden Ableitungen, Koeffizientenvergleich und das Lösen eines  $l \times l$ -Gleichungssystems mit konstanten Koeffizienten benötigt.

Wenn die charakteristischen Polynome von  $P$  und  $Q$  teilerfremd sind, kann man anstatt des Lösens des linearen Gleichungssystems einen erweiterten Euklidischen Algorithmus für  $P$  und  $Q$  durchführen. Dieser liefert Polynome  $A, B \in \mathbb{R}[X]$  von Grad  $\deg(A) = l$  und  $\deg(B) = k$ , sodass  $AP + BQ = 1$  ist, wobei 1 dem Identitätsoperator entspricht. Die Lösung von (16) ist dann  $A(D)(b)$ , da

$$P(D)A(D)(b) = (PA)(D)(b) = (1 - BQ)(D)(b) = b - (BQ)(D)(b) = b - B(D)Q(D)(b) = b.$$

**Beispiel 4.11.** Bei der inhomogenen Schwingungsgleichung

$$P(D)(f) = f''(t) - f'(t) + f(t) = \cos(\sqrt{2}t)$$

sind die Lösungen der homogenen Gleichung aus Beispiel 4.8 bekannt. Die rechte Seite  $b(t) = \cos(\sqrt{2}t)$  ist eine Lösung der linearen autonomen Differentialgleichung

$$Q(D)(b) = b''(t) + 2b(t) = 0.$$

Die Polynome  $P(D), Q(D)$  sind teilerfremd und der erweiterte euklidische Algorithmus liefert  $A(D) = (D - 1)/3$  als Kofaktor. Dann ist

$$h(t) = A(D)(b(t)) = -\frac{\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) + \cos(\sqrt{2}t)}{3}$$

eine spezielle Lösung und die allgemeine Lösung lautet

$$f(t) = c_1 e^{t/2} \cos(\sqrt{3}t/2) + c_2 e^{t/2} \sin(\sqrt{3}t/2) + h(t).$$

**Aufgabe 4.1.** 1. Führe die Fibonacci-Rekursion aus Beispiel 4.3 auf eine Rekursion erster Ordnung zurück.

2. Überprüfe Satz 4.5 anhand der Fibonacci-Rekursion und dessen charakteristisches Polynom.

**Aufgabe 4.2.** Man berechne eine Lösung folgender Rekursionen und analysiere dessen Verhalten für  $t \rightarrow \infty$ .

1.  $\forall t \in \mathbb{N} : 6f(t+3) = 7f(t+2) - f(t), f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 1.$

2.  $\forall t \in \mathbb{N} : 2f(t+3) = 3f(t+2) - f(t), f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 1.$

**Aufgabe 4.3.** Für welche Parameter  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist der Ursprung ein (asymptotisch) stabiler / instabiler Fixpunkt der linearen Rekursion

$$\forall t \in \mathbb{N} : 8f(t+2) - 2\lambda f(t+1) - \lambda^2 f(t) = 0$$

für  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ?

**Aufgabe 4.4.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion, die bei 0 in einer Umgebung  $U$  analytisch ist. Zeige, dass

1. die Taylorreihe mit der Potenzreihenentwicklung von  $f$  an einer Stelle  $x_0 \in U$  übereinstimmt.

2.  $C, Q \in \mathbb{R}$  existieren mit

$$\forall r \in \mathbb{N} : f^{(r)}(0) < CQ^r.$$

**Aufgabe 4.5.** Bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$f'''(t) - f(t) = 1 + t^2$$

1. indem man eine allgemeine Lösung der homogenen Gleichung und eine spezielle Lösung findet;

Hinweis: Die Gleichung besitzt eine polynomiale Lösung zweiten Grades.

2. indem man eine lineare homogene Differentialgleichung mit  $1 + t^2$  als Lösung findet und Operatorenrechnung anwendet.

**Aufgabe 4.6.** Berechne die Lösung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  der Differentialgleichung

$$\forall t : f'(t) + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} f(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix}, f(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 4.7.** Löse das Anfangswertproblem

$$f'''(t) - 2f''(t) + f'(t) - 2f(t) = 0, \quad f(0) = 0, f'(0) = f''(0) = 1$$

für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1. direkt über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms;
2. durch Rückführung auf ein System erster Ordnung und über die Berechnung des Matrixexponentials.

**Aufgabe 4.8.** 1. Berechne für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die inverse Matrix von  $e^{At}$ .

2. Zeige Rechengesetz 4:  
Für invertierbare  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gilt

$$e^{BAB^{-1}t} = B e^{At} B^{-1}.$$

3. Zeige die Umkehrung des Rechengesetzes 3 für das Matrixexponential:  
Wenn

$$\forall t : e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$$

gilt, dann gilt

$$AB = BA.$$

Hinweis: man berechne die zweiten Ableitungen der beiden Seiten der Gleichung bei  $t = 0$ .

## 5 Existenz und Eindeutigkeit

Das Hauptthema dieses Kapitels ist der Beweis der Existenz und Eindeutigkeit des Anfangswertproblems unter gewissen Voraussetzungen. Aus den Überlegungen in Kapitel 3 ist klar, dass das Zeigen von Existenz und Eindeutigkeit durchaus ein wesentlicher Bestandteil des “Lösens” eines AWP ist, wie zum Beispiel bei der Berechnung von Näherungslösungen.

### 5.1 Satz von Picard-Lindelöf

Der Satz von Picard-Lindelöf existiert in diversen Variationen und ist der prominenteste Satz über Existenz und Eindeutigkeit von Anfangswertproblemen. Wir konzentrieren uns auf folgende Version.

**Satz 5.1** (Picard/Lindelöf). *Es sei  $T$  eine zusammenhängende Teilmenge von  $\mathbb{R}$  (also ein Intervall, offen oder abgeschlossen, beschränkt oder unbeschränkt). Es sei  $k \in \mathbb{N}$ . Es sei  $F : T \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine stetige Funktion, die die Lipschitz-Bedingung erfüllt: es existiert eine Konstante  $L \in \mathbb{R}$ , sodass für alle  $x \in T, y, z \in \mathbb{R}^k$  gilt  $\|F(x, y) - F(x, z)\| \leq L\|y - z\|$ . Es sei  $t_0 \in T, x_0 \in \mathbb{R}^k$ . Dann hat das Anfangswertproblem für  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^k$*

$$f'(t) = F(t, f(t)), \quad f(t_0) = x_0 \tag{17}$$

eine eindeutige Lösung  $y : T \rightarrow \mathbb{R}^k$ .

Bevor wir uns dem Beweis zuwenden, geben wir ein paar Anmerkungen zur Voraussetzung bzw. der Reichweite des Satzes.

1. Die Lipschitz-Bedingung für  $F$  entspricht genau dem Fall, dass  $F$  Lipschitz-stetig in der zweiten Variable ist.
2. Es gibt Beispiele von stetigen Funktionen  $F$ , die nicht die Lipschitz-Bedingung erfüllen, wie zum Beispiel  $(t, x) \mapsto x^2$  oder  $(t, x) \mapsto \sqrt[3]{x}$ . In Aufgabe 3.1 haben wir gesehen, dass in den beiden genannten Fällen Satz 5.1 sogar ungültig ist.
3. Falls  $T$  in überlappende Teilintervalle zerlegt werden kann, sodass  $F$  in jedem Teilintervall Lipschitz-stetig ist, dann gilt die Schlussfolgerung des Satzes auch, da Existenz und Eindeutigkeit auf  $T$  equivalent zur Existenz und Eindeutigkeit auf jedem Teilintervall ist (Man erhält die eindeutige Lösung auf  $T$  indem man die Lösungen auf den Teilintervallen mit den Schnittpunkten als Anfangsstellen wählt.).
4. Im linearen Fall – sowohl homogen als auch nichthomogen – ist für kompakte  $T$  Lipschitz-Stetigkeit equivalent zur Stetigkeit. Die Annahme der Kompaktheit ist allerdings wegen Punkt (2) unproblematisch.
5. Wenn  $F$  stetig und nach  $x$  stetig differenzierbar ist, also die matrixwertige Funktion  $(t, x) \mapsto (F(t, x), \frac{\partial F(t, x)}{\partial x})$  existiert und stetig ist, dann ist die Lipschitz-Bedingung auf jedem kompaktem Intervall  $T$  erfüllt. Man wähle dazu  $L$  als eine Schranke der Operatornorm der Ableitung.

6. Das AWP für Differentialgleichungen höherer Ordnung kann auf das AWP erster Ordnung (17) zurückgeführt werden (hier sind die Anfangswerte von allen Ableitungen bis Ordnung minus eins vorzugeben). Bei dieser Rückführung bleibt die Lipschitz-Bedingung erhalten, also gibt es auch eine Version von Satz 5.1 für Differentialgleichungen höherer Ordnung, siehe Aufgabe 5.3.
7. Der Satz ist für den nicht-autonomen Fall formuliert, obwohl dieser auf den autonomen Fall zurückgeführt werden kann. Der Grund ist, dass bei dieser Rückführung die Lipschitz-Bedingung nicht erhalten bleibt und wir mit einer autonomen Version des Satzes 5.1 z.B. lineare nicht-autonome Gleichungen nicht behandeln könnten.
8. Im autonomen Fall ist  $F$  unabhängig von der Zeitvariable und kann als Funktion  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  aufgefasst werden. In vielen Fällen ist  $F$  nur auf einer offenen Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^k$  definiert. Da eine Lösung diesen Bereich verlassen könnte, ist der Beweis der Existenz schwierig. Allerdings kann oftmals lokale Eindeutigkeit gezeigt und die eindeutige Lösung bis an den Rand von  $U$  verfolgt werden, siehe dazu Korollar 5.3.

**Lemma 5.2.** *Es seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitz-stetig. Dann gibt es eine Lipschitz-stetige Fortsetzung  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  von  $f$ .*

*Beweis.* Eine Funktion  $x \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x))$  ist genau dann Lipschitz-stetig, wenn alle Komponenten  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-stetig sind. Daher reicht es die Behauptung für  $n = 1$  zu zeigen. In diesem Fall definieren wir für alle  $x \in \mathbb{R}^m$

$$h(x) = \sup\{f(y) - L\|x - y\| \mid y \in U\},$$

wobei  $L$  eine Lipschitz-Konstante für  $f$  ist. Die Funktion  $h$  stimmt auf  $U$  mit  $f$  überein und ist auf  $\mathbb{R}^m$  Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstante  $L$ .  $\square$

**Korollar 5.3.** *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^k$  offen, und  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  eine Lipschitz-stetige Funktion. Dann existiert eine eindeutige Schranke  $t_1 \in ((0, \infty) \cup \{+\infty\})$ , sodass das AWP für  $f : \mathbb{R} \rightarrow U$*

$$\forall t : f'(t) = F(f(t)), \quad f(0) = x_0$$

*auf  $(0, t_1)$  eine eindeutige Lösung  $f$  hat. Weiters lässt sich für  $t_1 \neq +\infty$  die Lösung  $f$  stetig nach  $t_1$ , mit einem Wert auf dem Rand von  $U$ , fortsetzen.*

*Beweis.* Nach Lemma 5.2 gibt es eine Lipschitz-stetige Fortsetzung  $H : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  von  $F$ . Das AWP für  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\forall t : h'(t) = H(h(t)), \quad h(0) = x_0$$

hat nach Satz 5.1 eine eindeutige Lösung. Mittels

$$t_1 := \min\{t \mid h(t) \notin U\},$$

wobei das Minimum der leeren Menge als  $+\infty$  definiert ist, folgt die Aussage.  $\square$

## 5.2 Vollständigkeit des Funktionenraums

Wir werden einen konstruktiven Beweis des Satzes 5.1 zeigen und eine Folge konstruieren, die gegen die Lösung konvergiert. Dafür betrachten wir die Lösung in einem geeigneten *vollständigen metrischen* Raum, also einen metrischen Raum, in dem jede Cauchy-Folge konvergent ist.

Es sei  $T \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall,  $n \in \mathbb{N}$ . Auf der Menge  $X := C^0(T, \mathbb{R}^n)$  aller stetigen Funktionen von  $T$  nach  $\mathbb{R}^n$  ist

$$(f, g) \mapsto \|f - g\|_\infty := \sup_{t \in T} \|f(t) - g(t)\|$$

überall definiert, weil stetige Funktionen auf kompakten Intervallen beschränkt sind. Somit ist  $(X, \|\cdot\|_\infty)$  ein metrischer Raum. Im Weiteren werden wir zeigen, dass dieser auch vollständig ist.

**Definition 5.1.** Es seien  $(A, d_A)$  und  $(B, d_B)$  metrische Räume. Eine Funktion  $f : A \rightarrow B$  heißt *gleichmäßig stetig*, wenn für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $\delta > 0$  existiert, sodass

$$\forall x, y \in A : d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

In Analysis 1 wird für  $A = B = \mathbb{R}$  folgendes gezeigt: gleichmäßige Stetigkeit impliziert Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit impliziert gleichmäßige Stetigkeit. Äquivalenz gilt im Allgemeinen jedoch nicht. Diese Aussagen, sowie der nachfolgende Satz dessen Beweis ähnlich wie im Fall  $A = B = \mathbb{R}$  funktioniert, gelten aber für beliebige metrische Räume.

**Satz 5.4.** *Es sei  $A$  kompakt. Dann ist jede stetige Funktion  $f : A \rightarrow B$  auch gleichmäßig stetig.*

Mit Hilfe von Satz 5.4 lässt sich nun die Vollständigkeit zeigen.

**Satz 5.5.** *Der metrische Raum  $(C^0(T, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$  ist vollständig.*

*Proof.* Es sei  $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge von stetigen Funktionen. Für jedes  $\epsilon > 0$  existiert ein  $n_\epsilon$ , sodass für alle  $i, j \geq n_\epsilon$  die Ungleichung  $\|f_i - f_j\|_\infty \leq \epsilon$  gilt. Für jedes  $t \in T$  und  $i, j \geq n_\epsilon$  ist  $\|f_i(t) - f_j(t)\|_\infty \leq \epsilon$  und somit ist die Folge  $(f_i(t))_i$  eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{R}^n$ . Da  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$  vollständig ist, ist  $(f_i(t))_i$  konvergent. Wir definieren die Grenzfunktion

$$g : T \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \lim_{i \rightarrow \infty} f_i(t).$$

Da für alle  $t \in T$  und  $i \geq n_\epsilon$  die Ungleichung

$$\|f_i(t) - g(t)\|_\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} \|f_i(t) - f_j(t)\|_\infty \leq \epsilon$$

gilt, folgt  $\|f_i - g\|_\infty \leq \epsilon$ . Somit ist  $g$  der gesuchte Grenzwert. Es bleibt noch zu zeigen, dass  $g$  stetig ist.



Sei  $\epsilon > 0$ . Die Funktion  $f_{n_{\epsilon/3}}$  ist stetig. Der Definitionsbereich ist kompakt, also ist  $f_{n_{\epsilon/3}}$  nach Satz 5.4 gleichmäßig stetig und es existiert ein  $\delta > 0$ , sodass für  $s, t \in T$  die Ungleichung  $\|f_{n_{\epsilon/3}}(s) - f_{n_{\epsilon/3}}(t)\|_\infty < \epsilon/3$  gilt. Damit folgt

$$\begin{aligned} \|g(s) - g(t)\| &\leq \|g(s) - f_{n_{\epsilon/3}}(s)\|_\infty + \|f_{n_{\epsilon/3}}(s) - f_{n_{\epsilon/3}}(t)\|_\infty + \|f_{n_{\epsilon/3}}(t) - g(t)\|_\infty \\ &< 2\|f_{n_{\epsilon/3}} - g\|_\infty + \epsilon/3 \leq 2\epsilon/3 + \epsilon = \epsilon. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 5.2.** Das erste Lehrbuch der Analysis wie wir sie heute kennen, ist Cauchy's "Cours d'Analyse" (1821). Es enthält nicht nur die  $\epsilon$ - $\delta$ -Definition der Stetigkeit, sondern auch eine Variante des obigen Satzes: wenn für eine Folge  $f_i : T \rightarrow \mathbb{R}^n$  von Funktionen für alle  $t \in T$  die Folge der Funktionswerte konvergent ist, dann ist die Grenzfunktion stetig. Der Beweis ist ähnlich dem obigen, enthält aber einen kleinen Fehler. Tatsächlich stimmt diese Variante im Allgemeinen nicht.

Dieser Widerspruch in der damals neuen Disziplin Analysis führte zu wichtigen Auseinandersetzungen und Entdeckungen; eine ausführliche Diskussion ist im Appendix des Buches *Proofs and Refutations* von Imre Lakator, herausgegeben durch J. Worrall und E. Zahar, CUP 1976, zu finden.

### 5.3 Beweis des Satzes von Picard/Lindelöf

Der folgende Satz liefert ein sehr mächtiges Hilfsmittel, um in einem vollständigen metrischen Raum diverse Arten von Gleichungen zu lösen.

**Satz 5.6** (Banachscher Fixpunktsatz). *Es sei  $X$  ein vollständiger metrischer Raum. Es sei  $f : X \rightarrow X$  eine Lipschitz-stetige Funktion mit Lipschitz-Konstante  $C < 1$ . Dann besitzt  $f$  einen eindeutigen Fixpunkt. Dieser Fixpunkt ist asymptotisch stabil bezüglich der Rekursion für  $x : \mathbb{N} \rightarrow X$  gegeben durch  $\forall i : x_{i+1} = f(x_i)$ . Jede Folge, die diese Rekursion erfüllt, konvergiert gegen den Fixpunkt.*

Weiters gilt für den Fixpunkt  $u \in X$  die Abschätzung

$$d(x_i, u) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - C} C^i.$$

(Man spricht von einer linearen Konvergenz.)

*Beweis.* Es sei  $(x_i)_i$  eine Folge, die die Rekursion erfüllt. Durch Induktion nach  $i$  unter Verwendung der Lipschitz-Stetigkeit sieht man, dass die Ungleichung

$$d(x_i, x_{i+1}) \leq C^i d(x_0, x_1)$$

für alle  $i \in \mathbb{N}$  erfüllt ist. Um zu zeigen, dass  $(x_i)_i$  eine Cauchy-Folge ist, nehmen wir

$N \geq i \geq j$  an. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(x_i, x_j) &\leq \sum_{r=i}^{j-1} d(x_r, x_{r+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{r=i}^{j-1} C^r = d(x_0, x_1) C^i \frac{1 - C^{j-i}}{1 - C} \\ &< \frac{d(x_0, x_1)}{1 - C} C^i \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - C} C^N. \end{aligned}$$

Für jedes  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $N \in \mathbb{N}$ , sodass  $\frac{d(x_0, x_1)}{1 - C} C^N < \epsilon$  gilt. Daher ist  $(x_i)_i$  eine Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit existiert ein Grenzwert  $u \in X$ . Da  $f$  Lipschitz-stetig, also insbesondere stetig ist, gilt

$$f(u) = f(\lim_{i \rightarrow \infty} x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{i+1} = u,$$

und  $u$  ist ein Fixpunkt. Sei  $v \in X$  ein weiterer Fixpunkt, dann ist

$$d(u, v) = d(f(u), f(v)) \leq C d(u, v).$$

Da  $C < 1$  ist das nur für  $d(u, v) = 0$ , also  $u = v$ , möglich.

Die Abschätzung der Konvergenzrate erhalten wir als Grenzwert der obigen Ungleichung

$$d(x_i, u) = \lim_{j \rightarrow \infty} d(x_i, x_j) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - C} C^i.$$

□

Um Satz 5.1 zu beweisen, werden wir nun das Anfangswertproblem (17), also

$$f'(t) = F(t, f(t)), \quad f(t_0) = x_0$$

für  $f : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ , equivalent zu einer Fixpunktgleichung umformulieren. Wir definieren dazu die Funktion  $P : C^0(T, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(T, \mathbb{R}^n)$  durch

$$P(h)(t) := x_0 + \int_{t_0}^t F(s, h(s)) ds.$$

Eine Funktion zwischen Funktionenräumen, wie es bei  $P$  der Fall ist, nennt man auch *Operator*.

**Lemma 5.7.** *Eine Funktion  $f \in C^0(T, \mathbb{R}^n)$  ist genau dann ein Fixpunkt von  $P$ , wenn sie differenzierbar ist und das AWP (17) löst.*

*Proof.* Man verwende den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. □

**Lemma 5.8.** *Der Operator  $P$  ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $K := l(T)L$ , wobei  $L$  die Lipschitz-Konstante von  $F$  und  $l(T)$  die Länge des Intervalls  $T$  ist.*

*Beweis.* Es seien  $f, g \in C^0(T, \mathbb{R}^n)$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\|P(f) - P(g)\| &= \sup_t \left\| \int_{t_0}^t (F(s, f(s)) - F(s, g(s))) ds \right\| \\
&\leq \sup_t \left| \int_{t_0}^t \|F(s, f(s)) - F(s, g(s))\| ds \right| \\
&\leq \sup_t \left| L \int_{t_0}^t \|f(s) - g(s)\| ds \right| \leq \sup_t L \left| \int_{t_0}^t \|f - g\|_\infty ds \right| \\
&= \sup_t L|t - t_0| \cdot \|f - g\|_\infty = l(T)L \|f - g\|_\infty.
\end{aligned}$$

□

Damit ist Satz 5.1 für den Fall  $l(T)L < 1$  bewiesen. Wenn  $l(T)L \geq 1$  ist, kann  $T$  in Teilintervalle mit Länge kleiner als  $1/L$  zerlegt werden. Satz 5.1 gilt in jedem Teilintervall und daher auch auf ganz  $T$  (siehe Punkt 3 in Kapitel 5.1).

Aus dem Beweis von Satz 5.1 erhalten wir im autonomen Fall auch eine Schranke für den Abstand der Lösungsfunktion  $f$  von einer beliebigen vorgegebenen Funktion  $g : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Wegen Satz 5.6 gilt nun

$$\|f - g\|_\infty \leq \frac{\|g - P(g)\|_\infty}{1 - l(T)L}$$

unter der Voraussetzung, dass der Nenner auf der rechten Seite positiv ist. Man beachte, dass die rechte Seite unabhängig von  $f$  ist.

Als erste Anwendung schätzen wir den Fehler beim Eulerschen Polygonzugverfahren (siehe Kapitel 3) ab. Wir nehmen an:  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $T := [0, 1]$ . Es sei  $f$  die exakte Lösung des AWP

$$\forall t \in T : f'(t) = F(f(t)), \quad f(0) = y_0.$$

Die Funktion  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei die Näherungslösung aus dem Verfahren: Das Intervall  $T$  wird in  $N$  gleich große Intervalle der Länge  $h = 1/N$  unterteilt, und auf jedem Teilintervall  $[i/N, (i+1)/N]$  ist  $g(t) = y_i + F(y_i)(t - i/N)$ , wobei  $(y_0, \dots, y_N)$  eine Folge ist, die durch die Rekursion

$$y_{i+1} = y_i + \frac{F(y_i)}{N}, \quad y_0 = x_0$$

berechnet wird. Der Abstand  $\|g - P(g)\|_\infty$  kann durch die Dreiecksungleichung beschränkt werden. Es gilt für  $M = \max(\|F(y_i)\|)$

$$\begin{aligned}
\|g(1) - P(g)(1)\| &\leq \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\frac{i}{N}}^{\frac{i+1}{N}} \|g'(t) - P(g)'(t)\|_\infty dt = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\frac{i}{N}}^{\frac{i+1}{N}} \|F(g(t)) - F(y_i)\|_\infty dt \\
&\leq \sum_{i=0}^{N-1} L \int_{\frac{i}{N}}^{\frac{i+1}{N}} \|g(t) - y_i\|_\infty dt = \sum_{i=0}^{N-1} L \int_0^{\frac{1}{N}} t \|F(y_i)\|_\infty dt \\
&\leq N \frac{LM}{2N^2} = \frac{LM}{2N}.
\end{aligned}$$

Für  $t \in [0, 1]$  ist  $\|g(t) - P(g)(t)\|$  ebenfalls durch diesen Ausdruck beschränkt, wobei in diesem Fall nicht über das gesamte Intervall summiert werden müsste. Daher erhalten wir eben diese Abschätzung auch für  $\|g - P(g)\|_\infty$ . Betrachtet man in der Abschätzung den Grenzwert der rechten Seite für  $N \rightarrow \infty$ , konvergiert der Fehler gegen Null. Eine bessere Konvergenz erhält man durch das Zweischrittverfahren

$$z_i = y_i + \frac{F(y_i)h}{2}, \quad y_{i+1} = y_i + hF(z_i).$$

Die bessere Konvergenz (von der Ordnung  $1/N^2$ ) kann aber nur unter zusätzlichen Voraussetzungen über die Ableitungen von  $F$  gezeigt werden. Ähnliches gilt für das Runge-Kutta-Verfahren, das für genügend glatte Funktionen noch besser als das Zweischrittverfahren konvergiert.

Als nächstes untersuchen wir, wie stark sich die Lösung ändert, wenn man den Anfangswert ändert. Es sei wieder  $n$  beliebig, und  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante  $L$ . Es sei  $T \subset \mathbb{R}$  ein kompaktes Intervall mit Länge  $l(T) < \frac{1}{L}$ , das  $0$  enthält. Der Abstand der Lösungen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow X$  mit AW  $f(0) = x_0, g(0) = y_0 \in X$  lässt sich durch Anwendung des Picard/Lindelöf-Operators  $P : C^0(T, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(T, \mathbb{R}^n)$  auf  $g$  zeigen:

$$P(g)(t) = x_0 + \int_0^t F(g(s)) ds = x_0 + \int_0^t g'(s) ds = x_0 + g(t) - y_0.$$

Es folgt

$$\|f - g\|_\infty \leq \frac{\|P(g) - g\|_\infty}{1 - l(T)L} = \frac{\|x_0 - y_0\|}{1 - l(T)L}.$$

Der Abstand zwischen den Werten zweier Lösungen vergrößert sich daher nach der Zeit  $t$  höchstens um einen Faktor  $\frac{1}{1 - l(t)L}$ . Wenn  $l(T)L \geq 1$  gilt, dann hilft es auch hier das Intervall in  $N$  gleich große Teilintervalle zu unterteilen. Der Abstand der Werte vergrößert sich dann höchstens um den Faktor  $\left(\frac{1}{1 - \frac{l(T)L}{N}}\right)^N$ . Wir lassen  $N$  gegen unendlich gehen:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 - \frac{l(T)L}{N}}\right)^N = e^{l(T)L}.$$

Der Abstand vergrößert sich also höchstens um einen Faktor, der exponentiell mit der Zeit wächst.

## 5.4 Differenzierbare Vektorfelder

Im Weiteren betrachten wir den autonomen Fall und somit für offene Mengen  $T \subset \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}^k$ , eine differenzierbare Funktion  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^k$  und  $f : T \rightarrow X$  die Differentialgleichung

$$\forall t : f'(t) = F(f(t)).$$

Wir nennen  $F$  ein *differenzierbares Vektorfeld* und die Lösungen der zu  $F$  gehörigen Differentialgleichung *Integralkurven* von  $F$ . Wir zeigen in Satz 5.9, dass es zu einem Anfangswert  $x_0 \in X$  eine maximale Menge  $T(x_0) \subset \mathbb{R}$  mit eindeutiger Lösung des AWP und  $T(x_0)$  als Definitionsbereich gibt. Diese Integralkurven bezeichnen wir als *maximal*.

**Satz 5.9.** *Es sei  $X \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar. Durch jeden Punkt  $x_0 \in X$  gibt es eine eindeutige maximale Integralkurve  $f : T(x_0) \rightarrow X$  von  $F$  mit  $T(x_0) \subset \mathbb{R}$  offen, sodass*

- $0 \in T(x_0)$  und  $f(0) = x_0$ ;
- wenn  $\sup(T(x_0))$  existiert, dann existiert  $\lim_{t \rightarrow \sup(T(x_0))} f(t)$  und liegt auf dem Rand von  $X$ ;
- wenn  $\inf(T(x_0))$  existiert, dann existiert  $\lim_{t \rightarrow \inf(T(x_0))} f(t)$  und liegt auf dem Rand von  $X$ .

*Beweis.* Man überdecke  $X$  durch offene Teilmengen mit kompaktem Abschluss in  $X$  (kompakte Ausschöpfung). Auf jeder Teilmenge ist  $F$  Lipschitz-stetig und Korollar 5.3 kann angewandt werden.  $\square$

Basierend auf Satz 5.9 ist folgende Definition möglich.

**Definition 5.3.** Für ein gegebenes Vektorfeld  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^k$  definieren wir die Menge  $\Sigma_F = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times X \mid t \in T(x)\}$  und den *Fluss*

$$\varphi : \Sigma_F \rightarrow X, (x, t) \mapsto f(t),$$

wobei  $f$  die eindeutige maximale Integralkurve von  $F$  mit AW  $f(0) = x$  ist.

Folgende Eigenschaften des Flusses folgen unmittelbar:

- Der Fluss ist für  $t = 0$  definiert und es gilt  $\varphi(0, x) = x$ .
- Es gilt die Funktionalgleichung

$$\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(s + t, x),$$

wann immer die linke Seite definiert ist.

- Die Abbildung  $\varphi_t : X \rightarrow X, x \mapsto \varphi(t, x)$  ist bijektiv und hat die Umkehrfunktion  $\varphi_{-t}$ .

Mit Hilfe einer kompakten Ausschöpfung lässt sich auch eine Schranke für die Länge der Vektoren, die dann auch eine Schranke der Ableitungen aller Integralkurven ist, zeigen:

**Satz 5.10.** *Es sei  $X \subset \mathbb{R}^k$ ,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^k$  differenzierbar. Dann ist  $\Sigma_F$  offen und  $\varphi : \Sigma_F \rightarrow X$ , der Fluss von  $F$ , stetig.*

*Beweis.* Es sei  $x_0 \in X$ . Es sei  $V \subset X$  eine beschränkte offene Umgebung von  $x_0$  mit Abschluss in  $X$ . Wir schränken das Vektorfeld  $F$  zuerst auf  $V$  ein. Dort ist die Ableitung von  $F$  beschränkt, also ist die Einschränkung Lipschitz-stetig. Es sei  $G$  eine beschränkte und Lipschitz-stetige Fortsetzung der Einschränkung auf ganz  $\mathbb{R}^n$ . Es sei  $L$  eine Lipschitz-Konstante von  $G$  und  $M$  eine Schranke der Länge der Vektoren im Bild von  $G$ . Wir wählen eine offene Umgebung  $W \subset V$  von  $x_0$ , deren Abschluss in  $V$  enthalten ist. Dann hat jeder Punkt im Abschluss von  $W$  einen positiven Abstand zum Rand von  $V$ ; es sei  $R$  das Minimum aller dieser Abstände (das Minimum wird erreicht, weil der Abschluss von  $W$  kompakt ist). Es sei

$$T := \{t \in \mathbb{R} \mid M|t| < R\}.$$

Dann ist sichergestellt, dass die Intergralkurven durch Anfangswerte in  $W$  in der Zeit  $T$  die Menge  $V$  nicht verlassen.

Es sei  $\tilde{\varphi} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  der Fluss von  $G$  – dieser ist überall definiert, weil  $G$  Lipschitz-stetig ist. Dann gilt für alle  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$  und  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}(t_1, x_1) - \tilde{\varphi}(t_2, x_2)\| &\leq \|\tilde{\varphi}(t_1, x_1) - \tilde{\varphi}(t_1, x_2)\| + \|\tilde{\varphi}(t_1, x_2) - \tilde{\varphi}(t_2, x_2)\| \\ &\leq e^{L|t_1|}\|x_1 - x_2\| + M|t_1 - t_2|. \end{aligned}$$

Konvergiert  $(t_2, x_2)$  gegen  $(t_1, x_1)$ , geht die rechte Seite gegen Null und somit ist  $\tilde{\varphi}$  stetig. Im Bereich  $T \times W$  stimmt der Fluss von  $F$  mit dem Fluss von  $G$  überein, daher ist auch  $\varphi$  stetig im Inneren von  $T \times W$ . Da  $x_0$  am Anfang beliebig gewählt war, ist damit gezeigt, dass  $\varphi$  stetig in jedem Punkt  $(0, x)$  mit  $x \in X$  ist und dass jeder solche Punkt ein innerer Punkt des Definitionsbereichs  $\Sigma_F$  ist.

Ein beliebiger Punkt  $(t_0, x_0) \in \Sigma_F$  kann mit Hilfe der Funktionalgleichung

$$\varphi(t + t_0, x_0) = \varphi(t, x_1)$$

auf eine Stelle mit  $t = 0$  verschoben werden. Daher ist  $\varphi$  stetig in  $(t_0, x_0)$  und der Punkt  $(t_0, x_0)$  ist ein innerer Punkt von  $\Sigma_F$ .  $\square$

Der nächste Satz besagt, dass die Lösung einer Differentialgleichung nicht nur stetig vom Anfangswert abhängt, sondern auch stetig in einem eventuell vorkommenden Parameter in der Differentialgleichung ist.

**Satz 5.11.** *Es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$  und  $P \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall. Für ein stetig differenzierbares  $F : (P \times X) \rightarrow \mathbb{R}^n$  (auch als parameterabhängiges Vektorfeld bezeichnet) und  $\lambda \in P$  sei  $\varphi_\lambda : \Sigma_{F_\lambda} \rightarrow X$  der Fluss von  $F_\lambda : x \rightarrow F(\lambda, x)$ . Es sei  $\bar{\varphi} : (\lambda, t, x) \mapsto \varphi_\lambda(t, x)$  die parameterabhängige Flussfunktion, die genau dann definiert ist, wenn  $(t, x) \in \Sigma_{F_\lambda}$  ist. Dann ist der Definitionsbereich von  $\bar{\varphi}$  offen und  $\bar{\varphi}$  ist stetig.*

*Beweis.* Wir definieren das Vektorfeld  $G$  auf  $P \times X$  durch  $(\lambda, X) \mapsto (0, F_\lambda(x))$ . Der Fluss von  $G$  ist die Funktion  $(t, \lambda, x) \mapsto (\lambda, \bar{\varphi}(\lambda, t, x))$ . Da  $G$  differenzierbar ist, ist nach Satz 5.10 sein Fluss stetig und der Definitionsbereich offen.  $\square$

Nun wollen wir noch die Differenzierbarkeit des Flusses zeigen. Es ist klar, dass die partielle Ableitung nach der Zeit existiert und stetig ist – es ist ja gerade die rechte Seite der Differentialgleichung – aber die partielle Ableitung nach dem Anfangswert ist noch nicht klar.

Wir beweisen den Satz für  $n = 1$ . Der Beweis lässt sich auf den vektorwertigen Fall verallgemeinern, ist aber technisch kompliziert. Wir verweisen daher auf <https://www.math.uni-hamburg.de/home/lauterbach/scripts/dsode12/ch3.pdf>, Satz 3.2.14, Seite 89ff.

**Satz 5.12.** *Es sei  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar,  $\varphi : \Sigma_F \rightarrow X$  der Fluss von  $F$ . Dann ist  $\varphi$  stetig differenzierbar.*

*Beweis.* Es sei  $(x, t) \in \Sigma_F$ . Für kleine  $\lambda \neq 0$  ist  $(x + \lambda, t) \in \Sigma_F$ . Wir setzen

$$h_\lambda(t) := \frac{\varphi(t, x + \lambda) - \varphi(t, x)}{\lambda}$$

und zeigen, dass der Grenzwert für  $\lambda$  gegen Null existiert. Wir berechnen die Ableitung:

$$\begin{aligned} h'_\lambda(t) &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x + \lambda) - \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x)}{\lambda} = \frac{F(\varphi(t, x + \lambda)) - F(\varphi(t, x))}{\lambda} \\ &= \frac{F(\varphi(t, x + \lambda)) - F(\varphi(t, x))}{\varphi(t, x + \lambda) - \varphi(t, x)} \cdot \frac{\varphi(t, x + \lambda) - \varphi(t, x)}{\lambda} \\ &= \frac{F(\varphi(t, x + \lambda)) - F(\varphi(t, x))}{\varphi(t, x + \lambda) - \varphi(t, x)} h_\lambda(t) \end{aligned}$$

(man beachte, dass der Nenner des Faktors ungleich 0 ist, weil  $\varphi_t$  injektiv ist). Dies ist eine parameterabhängige Differentialgleichung für  $h_\lambda$ . Der Anfangswert ist

$$h_\lambda(0) = \frac{x + \lambda - x}{\lambda} = 1.$$

Wegen Satz 5.11 ist die Lösung stetig in  $\lambda$ . Der Grenzwert  $h_0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0} h_\lambda$  existiert, da er die Lösung des Anfangswertsproblems für  $\lambda = 0$  ist:

$$h'_0(t) = F'(\varphi(t, x)) h_0(t), \quad h_0(0) = 1.$$

In dieser Differentialgleichung ist  $x$  ein Parameter, und wegen Satz 5.11 ist die Ableitung des Flusses stetig in  $x$ . Die Ableitung von  $\varphi$  nach  $t$  ist das differenzierbare Vektorfeld  $F$  selbst und daher insbesondere stetig.  $\square$

**Aufgabe 5.1.** Untersuche, ob folgende Anfangswertprobleme für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine eindeutige Lösung besitzen.

1.  $f'(t) = \frac{e^t f(t)^3}{1+f(t)^2} + t \sin(f(t)), \quad f(0) = 1.$
2.  $t f'(t) = 3f(t), \quad f(0) = 0.$

**Aufgabe 5.2.** Bestimme den Picard-Lindelöf Operator  $P : C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des AWP

$$\forall t : f'(t) = t f(t), \quad f(0) = 1$$

für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Folge  $(f_n)_n$  sei definiert durch  $f_0 : t \mapsto 0$  und  $\forall n \in \mathbb{N} : f_n = P(f_{n-1})$ . Berechne die ersten fünf Folgenglieder. Vergleiche mit der Taylorentwicklung der exakten Lösung.

**Aufgabe 5.3.** Formuliere und zeige den Satz von Picard-Lindelöf für Anfangswertprobleme höherer Ordnung.

**Aufgabe 5.4.** Wir zeigen den *Satz von Peano* im skalaren Fall:

Sei  $T \times X \subset \mathbb{R}^2$  kompakt und  $F : T \times X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann besitzt für  $t_0 \in T, x_0 \in X$  und  $f : T \rightarrow X$  das AWP

$$f'(t) = F(t, f(t)), \quad f(t_0) = x_0$$

eine lokale Lösung.

Beweisskizze: Wir definieren zuerst maximale  $(t_0 - a, t_0 + a) \subset T, (x_0 - b, x_0 + b) \subset X$ . Damit setzen wir  $\alpha = \min(a, b/\|F\|_\infty)$ ,  $J = (t_0 - \alpha, t_0 + \alpha)$  und  $K = C^0(J, (x_0 - b, x_0 + b))$  als abgeschlossene, konvexe Menge im vollständigen Funktionenraum  $(C^0(J, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ . Zeige nun folgende Punkte:

1. Die Funktion  $f \in K$  löst das AWP genau dann wenn es ein Fixpunkt vom Picard-Lindelöf Operator  $P : K \rightarrow K$  ist. Dazu ist insbesondere  $P(K) \subset K$  zu zeigen.
2.  $P$  ist stetig (auf  $K$ ).
3. Die Elemente von  $P(K)$  sind punktweise beschränkt und gleichmäßig stetig.

Nach dem Satz von Arzela-Ascoli besitzt somit jede Folge aus  $P(K)$  auf  $J$  eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Dadurch ist  $P(K)$  relativ kompakt und die Aussage folgt mit dem Fixpunktsatz von Schauder.

**Aufgabe 5.5.** Betrachte das AWP  $f'(t) = F(t, f(t)), f(0) = 0$  für  $f : T = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  mit stetigem

$$F(t, x) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ 2t, & 0 < |t| \leq 1, x < 0 \\ 2t - \frac{4x}{t}, & 0 < |t| \leq 1, 0 \leq x \leq t^2 \\ -2t, & 0 < |t| \leq 1, t^2 \leq x \end{cases}$$

Zeige, dass eine iterative Anwendung des Picard-Lindelöf Operators auf  $f_0 = 0$  zu einer alternierenden Folge führt. Wie passt dieses Verhalten zum Satz von Peano bzw. Satz von Picard-Lindelöf?

**Aufgabe 5.6.** Berechne den Fluss folgender Vektorfelder und spezifiziere deren Definitionsbereiche.



1.  $F_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2;$

2.  $F_2 : X = (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (1 + x)^{1/3}.$

**Aufgabe 5.7.** Berechne den Fluss folgender Vektorfelder und spezifiziere deren Definitionsbereiche.

1.  $F_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (y, 1);$

2.  $F_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\sin(y), 0).$

## 6 Äquivalenz und lokale Äquivalenz

Unser Ziel ist es beliebige (nicht-lineare) Differentialgleichungen für  $f : \mathbb{R} \rightarrow X \subset \mathbb{R}^n$

$$\forall t : f'(t) = F(f(t)),$$

mit Anfangswert  $f(t_0) = x_0$ , qualitativ zu beschreiben, wobei  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine differenzierbare Funktion ist. Die Äquilibrien sind die Nullstellen von  $F$ . In der Nähe der Äquilibrien kann man  $F$  durch seine Ableitung approximieren. Ersetzt man  $F$  in der Differentialgleichung durch diese Approximation, dann erhält man die linearisierte Differentialgleichung für  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\forall t : g'(t) = A g(t), \quad A = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0).$$

Unter gewissen Voraussetzungen, die wir später noch genau angeben werden, verhalten sich die Lösungen der Linearisierung asymptotisch gleich wie die Lösungen der Ausgangsgleichung und sind eine gute Annäherung.

Ferner geben wir auch für diskrete Systeme eine Beschreibung des qualitativen Verhaltens an, indem wir Fixpunkte und Zyklen untersuchen.

### 6.1 Der Fundamentalsatz der Algebra

Als Vorbereitung für die oben beschriebene Untersuchung ist es notwendig zu bestimmen, wie sich das Stabilitätsverhalten ändert, wenn die Matrix  $A$  geringfügig gestört wird. Das Stabilitätsverhalten wird von den Nullstellen des charakteristischen Polynoms und der Größe der Jordan-Blöcke bestimmt. Wir würden deshalb gerne ein Resultat verwenden, das besagt, dass die Nullstellen eines Polynoms stetig von den Koeffizienten abhängen. Im reellen Fall machen bereits die Anzahl der Nullstellen Sprünge. Auch im komplexen Fall gibt es Schwierigkeiten, denn es lässt sich keine stetige Funktion finden, die jedem Polynom einen Vektor von Nullstellen zuordnet. Das Problem ist die Mehrdeutigkeit der Wurzeloperation im komplexen.

Zunächst soll sichergestellt werden, dass die Anzahl der Nullstellen, mit Vielfachheit gezählt, gleich dem Grad des Polynoms ist. Das ist der Fundamentalsatz der Algebra. Für dessen Beweis benötigen wir ein Lemma, das die Nullstellen eines Polynoms beschränkt.

**Lemma 6.1.** *Es sei  $p := X^d + b_1 X^{d-1} + \dots + b_d$  ein Polynom von Grad  $d$ ,  $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{C}$ . Es sei  $\epsilon > 0$ . Es sei  $M \in (0, \infty)$  eine reelle Zahl, sodass  $|b_i| < \frac{M^i}{d+1}$  für  $i = 1, \dots, d$  und  $\epsilon < \frac{M^d}{d+1}$  gilt. Dann gilt für jedes  $z$  mit  $|z| > M$  die Ungleichung  $|p(z)| > \epsilon$ . Insbesondere hat  $p$  keine Nullstelle mit Betrag größer als  $M$ .*

*Proof.* Es sei  $|z| > M$ . Dann gilt für  $i = 1, \dots, d$ :  $|b_i z^{d-i}| < \frac{|z^d|}{d+1}$  und  $\epsilon < \frac{|z^d|}{d+1}$ . Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$|p(z)| = |z^d + \sum_{i=1}^d b_i z^{d-i}| > |z^d| - \sum_{i=1}^d |b_i z^{d-i}| > |z^d| - d \frac{|z^d|}{d+1} = \frac{|z^d|}{d+1} > \epsilon.$$

□

**Satz 6.2** (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes normierte Polynom  $p \in \mathbb{C}[X]$  von Grad  $d$  lässt sich schreiben als Produkt von  $d$  Linearfaktoren*

$$p = (X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_d)$$

mit  $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{C}$ .

*Beweis.* Es reicht zu zeigen, dass  $p$  eine Nullstelle hat. Wenn  $a$  eine Nullstelle ist, dann ist  $(z - a)$  ein Faktor, und der Quotient ist von kleinerem Grad. Mit Induktion kann man die Behauptung zeigen.

Wir nehmen indirekt an, dass  $p$  keine Nullstellen hat. Die Menge  $\{z \mid p(z) \leq p(0)\}$  ist abgeschlossen, und wegen Lemma 6.1 beschränkt, also kompakt. Daher nimmt die Funktion  $z \mapsto |p(z)|$  auf dieser Menge ein Minimum an, und dieses Minimum ist auch das globale Minimum der Funktion  $z \mapsto |p(z)|$  auf ganz  $\mathbb{C}$ . Es sei  $z_0$  eine Minimalstelle. Die Taylorentwicklung von  $p$  um  $z_0$  ist

$$p(z_0 + w) = b_0 + b_1 w + b_2 w^2 + \cdots + b_d w^d.$$

Es gilt  $b_0 \neq 0$ , sonst wäre  $z_0$  eine Nullstelle, und  $b_d = 1$ . Es sei  $k$  der kleinste positive Index mit  $b_k \neq 0$ . Wir wählen nun  $s > 0$ , sodass die Ungleichungen  $|b_i|s^i < \frac{|b_k|s^k}{d+1}$  für  $i = k+1, \dots, d$  und  $|b_k|s^k < |b_0|$  erfüllt sind. Als nächstes wählen wir  $w \in \mathbb{C}$  mit  $|w| = s$ , sodass  $\frac{b_k w^k}{b_0}$  reell und negativ ist. Dann ist

$$\begin{aligned} |p(z_0 + w)| &\leq |b_0 + b_k w^k| + \sum_{i=k+1}^d |b_i w^i| = |b_0| - |b_k|s^k + \sum_{i=k+1}^d |b_i|s^i \\ &\leq |b_0| - |b_k|s^k + (d-k) \frac{|b_k|s^k}{d+1} = |b_0| - \frac{(k+1)|b_k|s^k}{d+1} < |b_0| = |p(z_0)|, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Wir brauchen noch eine Art Stetigkeits-Aussage für die Abhängigkeit der Nullstellen vom Polynom. Sei dazu  $d \in \mathbb{N}$  und  $P_d$  die Menge aller normierten Polynome vom Grad  $d$ . Dann definieren wir die stetige Funktion

$$z_d : \mathbb{C}^d \rightarrow P_d, (a_1, \dots, a_d) \mapsto (X - a_1) \cdots (X - a_d).$$

Das Polynom  $z_d(a_1, \dots, a_d)$  hat  $a_1, \dots, a_d$  als Nullstellen. Wegen des Fundamentalsatzes der Algebra ist  $z_d$  surjektiv. Allerdings ist  $z_d$  nicht injektiv, da die Elemente  $a_1, \dots, a_d$  permutiert werden können.

**Lemma 6.3.** *Die Abbildung  $z_d$  ist offen: das Bild jeder offenen Menge ist offen.*

*Beweis.* Es sei  $U \subset \mathbb{C}^d$  offen. Es sei  $V$  die Menge aller Permutationen von Elementen in  $U$ . Es sei  $p : \mathbb{N} \rightarrow (P_d \setminus z_d(V))$  eine Folge im Komplement von  $z_d(V)$ , die in  $P_d$  konvergent ist. Es sei  $n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}^d$  eine Folge von Urbildern: für jedes  $i \in \mathbb{N}$  wählen wir  $n(i) \in z_d^{-1}(p(i))$ . Da

$p$  eine konvergente Folge ist, ist  $p$  beschränkt. Aus Lemma 6.1 folgt, dass  $n$  beschränkt ist. Daher besitzt  $n$  eine konvergente Teilfolge  $n' : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}^d$ . Es sei  $p' : \mathbb{N} \rightarrow P_d$  die entsprechende Teilfolge von  $p$  (d.h.  $p'(i) = z_d(n'(i))$  für alle  $i$ ). Die Menge  $V$  ist offen als Vereinigung (endlich vieler) offener Mengen. Das Komplement von  $V$  ist daher abgeschlossen. Also ist  $\lim_{i \rightarrow \infty} n'(i)$  im Komplement von  $V$ . Es folgt

$$\lim_{i \rightarrow \infty} p(i) = \lim_{i \rightarrow \infty} p'(i) = \lim_{i \rightarrow \infty} z_d(n'(i)) = z_d \left( \lim_{i \rightarrow \infty} n'(i) \right) \in z_d(\mathbb{C}^d \setminus V) = P_d \setminus z_d(V).$$

Also ist  $P_d \setminus z_d(V)$  abgeschlossen und daher ist  $z_d(U) = z_d(V)$  offen.  $\square$

Lemma 6.3 ist eine mathematisch präzise Formulierung dessen, was wir uns vorher als “eine Art Stetigkeits-Aussage” gewünscht haben. Es erlaubt uns, zu sagen, dass die Menge aller Polynome mit Nullstellen in einer festgelegten offenen Teilmenge  $U$  von  $\mathbb{C}$  – zum Beispiel der Menge der Zahlen mit negativem Realteil – eine offene Menge ist. Wenn man ein Polynom  $p$  in dieser Menge hat, dann gibt es ein  $\epsilon > 0$ , sodass jedes Polynom in einer  $\epsilon$ -Umgebung von  $p$  wieder Nullstellen in  $U$  hat.

Wir wollen Lemma 6.3 nun auf charakteristische Polynome von Matrizen anwenden.

**Satz 6.4.** *Es sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $a + b = n$ . Die Menge  $\mathcal{H}_{a,b} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  aller Matrizen, die  $a$  Eigenwerte mit negativem Realteil und  $b$  Eigenwerte mit positivem Realteil haben, wobei die Eigenwerte mit (algebraischer) Vielfachheit gezählt werden, ist eine offene Teilmenge von  $\mathbb{R}^{n \times n}$ .*

*Beweis.* Es sei  $A$  die Menge aller komplexen Zahlen mit negativem Realteil und  $B$  die Menge aller reellen Zahlen mit positivem Realteil. Die Menge  $A^a \times B^b$  ist offen in  $\mathbb{C}^n$ . Nach Lemma 6.3 ist  $z_n(A^a \times B^b)$  offen in  $P_d$ . Die Menge der reellen Polynome in  $z_n(A^a \times B^b)$ , definiert als  $P_{a,b}$ , ist ebenfalls offen in  $\mathbb{R}^n$ . Die Abbildung, die jeder Matrix ihr charakteristisches Polynom zuordnet, ist stetig. Da  $\mathcal{H}_{a,b}$  das Urbild von  $P_{a,b}$  unter dieser Abbildung ist, folgt die Aussage.  $\square$

Somit folgt ähnlich wie zuvor, dass für eine lineare Differentialgleichung, gegeben mittels einer Matrix  $A \in \mathcal{H}_{a,b}$ , eine  $\epsilon$ -Umgebung von  $A$  existiert die immer noch in  $\mathcal{H}_{a,b}$  enthalten ist. Wenn  $A$  geringfügig gestört wird, also  $\|A_1 - A\| < \epsilon$  gilt, dann haben  $A_1$  und  $A$  die gleiche Anzahl an Eigenwerten mit negativem bzw. positivem Realteil. Insbesondere haben beide Matrizen keine Eigenwerte mit Realteil gleich Null und  $a$  und  $b$  in Satz 6.4 sind gleich. Folglich ist der Nullpunkt genau dann für  $A$  stabil, wenn er stabil für  $A_1$  ist. Im positiven Fall gilt sogar asymptotische Stabilität. Somit bleibt das Stabilitätsverhalten unter kleinen Störungen der Matrix erhalten.

## 6.2 Satz von Hartmann/Grobmann

In diesem Abschnitt untersuchen wir Transformationen von Vektorfeldern. Diese erhalten das qualitative Verhalten von Lösungen der implizit gegebenen Differentialgleichungen und können möglicherweise einfacher gelöst werden als das ursprüngliche System.

**Transformationsequivalenz.** Ein differenzierbares Vektorfeld  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  (mit  $X \subset \mathbb{R}^n$  offen) kann für bijektive differenzierbare Abbildungen  $\alpha : X \rightarrow Y$  mit differenzierbarer

Umkehrung  $\alpha^{-1} : Y \rightarrow X$  auf folgende Art und Weise transformiert werden, sodass die Transformation Integralkurven erhält. Für Lösungskurven  $f(t)$  von  $f'(t) = F(f(t))$  setzen wir  $g(t) = \alpha(f(t))$  und daher gilt mittels Kettenregel

$$G(g(t)) = g'(t) = \alpha'(f(t))f'(t) = \alpha'(f(t))F(f(t)).$$

Somit erhalten wir die allgemeine Formel

$$G : Y \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad y = \alpha(x) \mapsto \alpha'(x) \cdot F(x) \quad (18)$$

für ein transformiertes Vektorfeld  $G$ . Für die rechnerische Transformation von Differentialgleichungen kann auch die transformierte Gleichung mit der Kettenregel ausgerechnet werden. Vektorfelder, die durch eine solche Transformation ineinander übergeführt werden können, heißen *transformationsequivalent*.

Nun möchten wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen Vektorfelder transformationsequivalent sind bzw. welche Eigenschaften diese teilen. Es gilt für (unter  $\alpha : X \rightarrow Y$ ) transformationsequivalente Vektorfelder  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n, G : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$ :

- Equilibrien werden in Equilibrien transformiert, also  $F(x_0) = 0$  genau dann wenn  $G(\alpha(x_0)) = 0$ ;
- Integralkurven bleiben erhalten, es gilt also

$$\alpha(\varphi_F(t, x)) = \varphi_G(t, \alpha(x));$$

- Die Jacobi-Matrizen bei Equilibrien sind ähnlich, also für  $x_0 \in X$  mit  $F(x_0) = 0$  gilt  $F'(x_0) \sim G'(\alpha(x_0))$ .

Für  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in X$ , sodass  $x_0$  kein Equilibrium ist, wählen wir eine glatte Hyperfläche  $H$ . Das kann etwa eine Hyperebene sein, die  $x_0$  enthält und deren Tangentialebene bei  $x_0$  *nicht* den Vektor  $F(x_0)$  enthält. Der Fluss eingeschränkt auf  $H$ , also die Abbildung

$$\varphi|_H : \Sigma_F \cap (\mathbb{R} \times H) \rightarrow X, \quad (t, x) \mapsto \varphi(t, x),$$

ist in einer offenen Umgebung von  $(0, H)$  definiert. Die Ableitung  $\varphi|_H' = (\frac{\partial \varphi|_H}{\partial t}, \frac{\partial \varphi|_H}{\partial x})$  ist auf  $(0, H)$  eine invertierbare lineare Abbildung, da  $\frac{\partial \varphi|_H}{\partial t}(0, H)$  im von  $F(x_0)$  erzeugten eindimensionalen Vektorraum liegt, und das Bild von  $\frac{\partial \varphi|_H}{\partial x}$  die Tangentialhyperebene von  $H$  ist. Nach dem Satz über inverse Funktionen existiert somit eine Umgebung von  $(0, H)$ , sodass  $\varphi|_H$  invertierbar ist. Die inverse Abbildung transformiert die Integralkurven auf parallele Geraden, und das transformierte Richtungsfeld ist konstant:  $x \mapsto (1, 0, \dots, 0)$ . Somit gilt

- Vektorfelder der gleichen Dimension sind bei Nicht-Equilibrien lokal zueinander transformations-equivalent.

Eine weitere Operation auf Vektorfeldern die bei Transformation erhalten bleibt ist folgende.

**Definition 6.1.** Es sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein Vektorfeld und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Dann definieren wir die *vektorielle Ableitung*  $\partial_F(f) : X \rightarrow \mathbb{R}$  als

$$\partial_F(f)(x) := f'(x) \cdot F(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right) \cdot \begin{pmatrix} F_1(x) \\ \vdots \\ F_n(x) \end{pmatrix}.$$

Die vektorielle Ableitung beschreibt die Änderungsrate der Funktion entlang einer Integralkurve: für alle  $(x, t) \in \Sigma_F$  gilt aufgrund der Kettenregel

$$\frac{d f(\varphi(t, x))}{dt} = f'(\varphi(t, x)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = f'(\varphi(t, x)) \cdot F(\varphi(x, t)) = \partial_F(f)(\varphi(x, t)). \quad (19)$$

Insbesondere ist jede Funktion, deren vektorielle Ableitung gleich Null ist, auf jeder Integralkurve konstant. Weiters gilt:

- Transformationsequivalenz und vektorielle Ableitung sind kompatibel. Es gilt also für transformationsequivalente Vektorfelder  $F, G$  und  $x \in X$

$$\partial_F(f)(x) = \partial_G(f \circ \alpha^{-1})(\alpha(x)).$$

Dies folgt durch einfaches Einsetzen:

$$(f \circ \alpha^{-1})'(\alpha(x)) \cdot G(\alpha(x)) = f'(x) \cdot (\alpha'(x))^{-1} \cdot \alpha'(x) \cdot F(x) = f'(x) \cdot F(x) = \partial_F(f)(x).$$

Diese Überlegungen veranschaulichen wir nun in den folgenden Beispielen.

**Beispiel 6.5.** Wir untersuchen die Differentialgleichung für  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_2 + 2x_1x_2 + 2x_2^3, -x_1 - x_2^2).$$

Mit der (nicht-linearen) umkehrbaren Transformation

$$\alpha(x_1, x_2) = (x_1 + x_2^2, x_2) = (y_1, y_2),$$

erhalten wir durch direkte Anwendung der Formel (18)

$$G(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 1 & 2x_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 + 2x_1x_2 + 2x_2^3 \\ -x_1 - x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  in den transformierten Koordinaten, also von  $g'(t) = G(g(t))$  sind

$$g(t) = e \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} g(0) = (\cos(t)g_1(0) + \sin(t)g_2(0), -\sin(t)g_1(0) + \cos(t)g_2(0)).$$

Die Lösung  $f$  für die ursprüngliche Differentialgleichung erhält man durch Einsetzen:

$$(f_1(t), f_2(t)) = \alpha^{-1}(g(t)) = (g_1(t) - g_2(t)^2, g_2(t)).$$

**Beispiel 6.6.** Es sei  $X = (0, \infty)^2 \subset \mathbb{R}^2$  und  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto (x(1 - y), y(x - 1))$ . Das einzige Equilibrium ist  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ . Die vektorielle Ableitung der Funktion

$$g(x, y) := x - \ln(x) + y - \ln(y)$$

ist gleich Null auf ganz  $X$ . Daher sind die die Integralkurven Niveaulinien des Graphen von  $g$ . Diese Niveaulinien sind geschlossene Kurven und es folgt, dass es rund um das einzige Equilibrium periodische Integralkurven gibt.

Die Funktion  $g$  hat ein absolutes Minimum im Inneren und wächst unbeschränkt für  $x$  oder  $y$  gegen Null oder unendlich. Daraus folgt, dass jede Integralkurve in  $X$  (außer der konstanten Lösung im Equilibrium) geschlossen ist.

**Topologische Äquivalenz.** Ein etwas schwächerer Äquivalenzbegriff als der der Transformationsequivalenz ist folgender: Zwei stetig differenzierbare Richtungsfelder  $F : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $G : V \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißen *topologisch äquivalent*, wenn es einen Homöomorphismus  $\tau : U \rightarrow V$  gibt, der Integralkurven erhält und der für jede Integralkurve die Richtung beibehält. Transformationsequivalente Richtungsfelder sind topologisch äquivalent, aber die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie auch folgendes Beispiel zeigt.

**Beispiel 6.7.** Es seien  $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$  reelle Zahlen. Die Integralkurven des Vektorfelds

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2)$$

sind von der Form  $(c_1 e^{\lambda_1 t}, c_2 e^{\lambda_2 t})$ . Die Transformation

$$\alpha(x_1, x_2) := (\operatorname{sgn}(x_1)|x_1|^{1/\lambda_1}, \operatorname{sgn}(x_2)|x_2|^{1/\lambda_2})$$

führt die Lösungskurven in offene Halbgeraden durch den Nullpunkt über. Das Vektorfeld ist daher topologisch äquivalent zu

$$G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2).$$

Die Transformation ist ein Homöomorphismus, aber nicht differenzierbar im Nullpunkt. Da die Jacobi-Matrizen  $F'(0)$  in  $G'(0)$  nicht ähnlich sind, können  $F$  und  $G$  auch nicht auf ganz  $\mathbb{R}^2$  transformationsequivalent sein.

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Richtungsfeld,  $x_0 \in X$  ein Equilibrium. Wir nenne das Equilibrium *hyperbolisch*, wenn alle Eigenwerte (reell oder komplex) der Jacobi-Matrix  $F'(x_0)$  Realteil ungleich 0 haben.

Die *Linearisierung* des Vektorfeldes  $F$  bei  $x_0$  ist definiert als das Vektorfeld

$$L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto F'(x_0) \cdot x.$$

**Satz 6.8** (Hartmann/Grobmann). *Es sei  $x_0$  ein hyperbolisches Equilibrium des Vektorfeldes  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  seine Linearisierung bei  $x_0$ . Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0$  und eine offene Umgebung  $V$  von  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ , sodass  $F|_U$  und  $L|_V$  topologisch äquivalent sind.*

Wir beweisen den Satz von Hartmann/Grobmann nur für den (besonders wichtigen) Fall, dass alle Eigenwerte negativen Realteil haben. In diesem Fall ist der Nullpunkt für  $L$  ein asymptotisch stabiles Equilibrium. Dazu definieren wir eine differenzierbare Funktion  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  und eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0$  mit den folgenden Eigenschaften:

- $g(x_0) = 0$  und  $g(x) > 0$  für  $x \in U \setminus \{x_0\}$ ;
- $\partial_F(g)(x) < 0$  für  $x \in U \setminus \{x_0\}$ .

Eine Funktion mit solchen Eigenschaften wird *Ljapunov-Funktion* genannt und dessen Existenz ist ein hinreichendes Kriterium für asymptotische Stabilität wie folgendes Lemma zeigt.

**Lemma 6.9.** *Sei  $x_0$  ein isoliertes Equilibrium des Vektorfelds  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  eine Ljapunov-Funktion in einer Umgebung  $U$  von  $x_0$ . Dann ist  $x_0$  asymptotisch stabil.*

*Beweis.* Wir wählen eine kompakte Umgebung  $K$  von  $x_0$ , die in  $U$  enthalten ist. Der Rand  $\partial K$  ist ebenfalls kompakt. Wir setzen

$$c := \min(g(x) \mid x \in \partial K), \quad W := \{x \in X \mid g(x) < c\}.$$

Da  $c > 0$ , ist  $W$  eine offene Umgebung von  $x_0$ , die in  $U$  enthalten ist. Wir zeigen nun, dass für  $x \in W, t > 0$

- der Fluss  $\varphi$  von  $F$  definiert ist;
- $\varphi(t, x) \in W$  gilt;
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x) = x_0$ .

Dazu nehmen wir an, dass die Menge  $\{t_0 > 0 \mid \varphi(t_0, x) \in \partial W\}$  nicht leer ist. Diese Menge ist abgeschlossen und hat daher ein kleinstes Element  $t_0$ . Für  $\varphi(t, x) = f(t)$  erfüllt die Funktion  $h : [0, t_0] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(f(t))$  die Bedingungen  $h(0) < c, h(t_0) = c$  und  $h'(t) = \partial_F(g)(f(t)) < 0$ . Ein Widerspruch und die ersten beiden Teile der Behauptung sind gezeigt.

Die Folge  $(f(i))_{i \in \mathbb{N}}$  hat Werte in der kompakten Menge  $K$  und daher eine konvergente Teilfolge  $(f(s_i))_{i \in \mathbb{N}}$ . Nun ist  $h$  für alle positiven Stellen definiert, streng monoton fallend und beschränkt. Daher ist

$$0 = \lim_{i \rightarrow \infty} h'(i) = \lim_{i \rightarrow \infty} h'(s_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \partial_F(g)(f(s_i)) = \partial_F(g)(\lim_{i \rightarrow \infty} f(s_i)),$$

und  $\lim_{i \rightarrow \infty} f(s_i) = x_0$ . Somit ist  $\lim_{i \rightarrow \infty} h(s_i) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$  und daher  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = x_0$ .  $\square$

**Bemerkung 6.2.** Im Beweis von Lemma 6.9 haben wir mit  $W$  eine konkrete Umgebung angegeben, die der Fluss nicht mehr verlassen kann. Verkleinert man diese Menge weiter und setzt  $W' = \{x \mid g(x) < c'\}$  für  $c' \in (0, c)$ , dann erhalten wir immer kleinere Umgebungen von  $x_0$ , die der Fluss nicht mehr verlässt.



Für den Beweis des Satzes von Hartmann/Grobmann konstruieren wir eine Ljapunov-Funktion  $g$  und Umgebung  $U$  und wenden Lemma 6.9 an: Wir nehmen  $x_0 = 0$  an und definieren

$$g(x) := \int_0^\infty \|e^{tL}x\|^2 dt,$$

wobei  $L = F'(x_0)$ . Um zu zeigen, dass das uneigentliche Integral existiert, verwenden wir die Jordan-Normalform von  $L$  und die Annahme, dass die Eigenwerte negativen Realteil haben. Der Integrand ist nie negativ und nur für  $x = 0$  gleich Null, also gilt das gleiche auch für  $g$ . Der Gradient von  $g$  ist

$$g'(x) = \int_0^\infty \text{grad}(\langle e^{tL}x, e^{tL}x \rangle) dt = 2 \int_0^\infty (e^{tL})^\dagger e^{tL}x dt$$

ist eine lineare Funktion von  $x$ . Die vektorielle Ableitung nach  $L$  ist

$$2 \int_0^\infty (e^{tL})^\dagger e^{tL}x Lx dt = 2 \int_0^\infty \langle e^{tL}x, L e^{tL}x \rangle dt = \int_0^\infty \frac{\partial \|e^{tL}x\|^2}{\partial t} dt = -\|e^{0L}x\|^2 = -\|x\|^2.$$

Nachdem  $F$  bei 0 differenzierbar ist, ist  $F(x) = Lx + R(x)$  mit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|R(x)\|}{\|x\|} = 0$ . Es sei  $C$  eine Konstante, sodass  $\|g'(x)\| \leq C\|x\|$  für alle  $x$  ist. Wir wählen die Umgebung  $U$  so, dass  $\|R(x)\| < \frac{1}{2C}\|x\|$  für alle  $x \in U$ . Da  $g'(x)$  linear in  $x$  ist, gilt

$$\partial_F(g)(x) = \partial_L(g)(x) + g'(x) \cdot R(x) \leq -\|x\|^2 + C\|x\| \cdot \|R(x)\| \leq -\frac{1}{2}\|x\|^2.$$

Damit ist  $g$  eine Ljapunov-Funktion.

**Tipp:** Obige Konstruktion einer Lajpunov-Funktion  $g$  funktioniert für hyperbolische Equilibrien mit negativen Eigenwerten immer, ist aber aufwändig. Oftmals ist  $g(x) := \|x - x_0\|^2$  bereits eine Ljapunov-Funktion. Dazu reicht es aus zu zeigen, dass die vektorielle Ableitung in der Nähe von  $x_0$  negativ ist.

**Korollar 6.10** (Hartmann/Grobmann, Spezialfall). *Es sei  $X \subset \mathbb{R}^n$ ,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld,  $x_0 \in X$  ein hyperbolisches Equilibrium, sodass die Jacobi-Matrix  $F'(x_0)$  nur Eigenwerte mit negativem Realteil haben. Dann existiert eine Umgebung  $W$  von  $x_0$  und eine Umgebung  $V$  von 0 in  $\mathbb{R}^n$ , sodass  $F|_W$  und das Vektorfeld  $x \mapsto -x$  eingeschränkt auf  $V$  topologisch äquivalent sind.*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $x_0 = 0$  annehmen. Es seien  $g$  und  $W$  wie oben. Insbesondere ist  $g$  eine positiv definierte quadratische Form und  $W = \{x \in X \mid g(x) < c\}$  für eine positive Zahl  $c$ . Wir definieren die Abbildung

$$\tau : \overline{W} \rightarrow \overline{W}, \quad x \mapsto \varphi_F \left( \frac{1}{2} \ln \left( \frac{c}{g(x)} \right), \frac{x}{\sqrt{g(x)}} \right);$$

für  $x = 0$  ist die rechte Seite nicht definiert, hier setzen wir  $\tau(0) = 0$ .  $\tau$  ist stetig, injektiv, und gleich der Identität am Rand. Jede stetige und injektive Abbildung des Balls auf sich selbst, die am Rand die Identität ist, ist ein Homöomorphismus. Sie bildet die Halbgeraden durch 0 auf Integralkurven von  $F$  ab, also sind  $F$  und  $x \mapsto -x$  topologisch äquivalent.  $\square$

Wenn  $x_0$  ein Equilibrium von  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $y_0$  ein Equilibrium von  $G : Y \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist, und es existieren Umgebungen  $U$  von  $x_0$  und  $V$  von  $y_0$ , dann sagen wir:  $F$  ist bei  $x_0$  zu  $G$  bei  $y_0$  lokal topologisch equivalent. Nach dem Satz von Hartmann/Grobmann gilt also: jedes Vektorfeld ist bei jedem hyperbolischen Equilibrium lokal topologisch equivalent zu seiner Linearisierung.

**Bemerkung 6.3.** Man kann sogar zeigen, dass die Einschränkung von  $\tau$  auf  $W \setminus \{0\}$  ein Diffeomorphismus ist, der das Vektorfeld  $x \mapsto -x$  in das Vektorfeld  $F$  transformiert. Mit anderen Worten, ohne den Ursprung hätten wir sogar Transformationsequivalenz. Im Equilibrium kann es keine Transformationsequivalenz geben, außer wenn die Jacobi-Matrix  $F(x_0)$  gleich  $-I_n$  ist. (Das ist die einzige Matrix, die zu  $-I_n$  ähnlich ist.)

Hyperbolische Equilibrien, sodass die Eigenwerte der Jacobi-Matrix negativen Realteil haben, bezeichnen wir als *Senken*. Hyperbolische Equilibrien, sodass die Eigenwerte der Jacobi-Matrix positiven Realteil haben, bezeichnen wir als *Quellen*. Alle anderen hyperbolischen Equilibrien bezeichnen wir als *Sattelpunkte*.

**Lemma 6.11.** *Es seien  $A, B \in \mathcal{H}_{a,b} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$  (siehe Kapitel 6.1). Dann sind die Richtungsfelder  $x \mapsto Ax$  und  $y \mapsto By$  bei 0 lokal topologisch equivalent.*

*Beweis.* Für den Fall  $a = n, b = 0$  wenden wir Korollar 6.10 an. Im Fall  $a = 0, b = n$  können wir durch Zeitumkehrung  $t \mapsto -t$  auf den ersten Fall zurückführen. Im allgemeinen Fall zerlegt man erst in eine direkte Summe zweier Teilräume von Dimension  $a$  und  $b$ , wendet in jedem Teilraum einen der beiden obigen Fälle an und hat lokale Homöomorphismen auf den Teilräumen und die baut man dann zu einem zusammen.  $\square$

Die Kombination von zwei Tatsachen:

1. hyperbolische Senken sind lokal equivalent;
2. die Menge  $\mathcal{H}_{a,b}$  aller Matrizen, deren Eigenwerte negativen Realteil haben, ist offen (siehe Kapitel 6.1);

hat zur Folge, dass Störungen von hyperbolischen Senken wieder hyperbolische Senken sind. Analoges gilt für alle hyperbolischen Equilibrien. Für Equilibrien die nicht hyperbolisch sind, ist eine vergleichbare Aussage ungültig, wie auch in Aufgabe 6.2 gezeigt wird. Hier die genaue Aussage des Satzes.

**Satz 6.12.** *Es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $P \subset \mathbb{R}$  ein offenes Intervall das 0 enthält, und  $F : P \times X \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein parameterabhängiges differenzierbares Vektorfeld. Für jedes  $\lambda \in P$  setzen wir  $F_\lambda : x \mapsto F(\lambda, x)$ . Wenn  $x_0 \in X$  ein hyperbolisches Equilibrium ist, dann existiert  $\epsilon > 0$ , sodass für jedes  $\lambda \in P$  mit  $|\lambda| < \epsilon$  ein Equilibrium  $x_\lambda$  von  $F_\lambda$  existiert, das lokal topologisch equivalent zu  $F_0$  bei  $x_0$  ist.*

*Beweis.* Es sei  $G : P \times X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  die Funktion  $(\lambda, x) \mapsto (\lambda, F_\lambda(x))$ . Diese Funktion ist differenzierbar und an der Stelle  $(0, x_0)$  ist die Ableitung

$$G'(0, x_0) = \left( \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & & \\ * & & & F'_0(x_0) \end{array} \right).$$

Nach dem Satz der inversen Funktion ist  $G$  eingeschränkt auf  $(-\epsilon, \epsilon) \times U$  für ein  $\epsilon > 0$  invertierbar. Wir wenden  $G^{-1}$  auf die Gerade  $(t, 0)$  an und erhalten eine Kurve  $(t, \xi(t))$ . Für alle  $|\lambda| < \epsilon$  gilt  $F_\lambda(\xi(\lambda)) = 0$ , das heißt,  $\xi(\lambda)$  ist ein Equilibrium von  $F_\lambda$ . Die matrixwertige Funktion  $H : \lambda \mapsto F'_\lambda(\xi(\lambda))$  ist stetig. Wenn  $H(0) \in \mathcal{H}_{a,b}$  ist, kann man daher ein  $\epsilon'$  wählen, sodass  $H(\lambda) \in \mathcal{H}_{a,b}$  für alle  $\lambda \in (-\epsilon', \epsilon')$  ist. Diese Equilibrien sind dann alle lokal topologisch equivalent.  $\square$

### 6.3 Fixpunkte und Zykel

Es sei  $X \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Menge und  $F : X \rightarrow X$  stetig differenzierbar. Die Rolle der Equilibrien übernehmen im diskreten Fall die Fixpunkte von  $F$ . Es sei  $x_0 \in X$  ein Fixpunkt von  $F$ . Analog wie im diskreten Fall zeigt das diskrete dynamische System, das durch  $F$  gegeben ist, manchmal ein ähnliches Verhalten wie die Linearisierung bei  $x_0$ , die durch  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto F'(x_0)$  gegeben ist.

Wir bezeichnen den Fixpunkt als hyperbolischen Fixpunkt, wenn die Eigenwerte der Jacobi-Matrix  $F'(x_0)$  (reell oder komplex) Betrag ungleich 1 haben. Hier ist die diskrete Version von Hartmann/Grobmann (Spezialfall):

**Satz 6.13.** *Wir nehmen an, dass  $x_0 \in X$  ein hyperbolischer Fixpunkt ist, sodass die Jacobi-Matrix  $F'(x_0)$  nur Eigenwerte mit Betrag kleiner als 1 haben. Dann existiert eine offene Umgebung  $U$  von  $x_0$ , eine Konstante  $c \in (0, 1)$  und eine differenzierbare Funktion  $G : U \rightarrow \mathbb{R}$  mit den folgenden Eigenschaften:*

- a)  $g$  ist positiv außer bei  $x_0$  und  $g(x_0) = 0$ .
- b) Für alle  $y \in U$  gilt  $F(y) \in U, g(F(y)) \leq cg(y)$ .

*Beweis.* Der Beweis geht analog wie im kontinuierlichen Fall: zuerst konstruieren wir eine positive definite quadratische Form für die Linearisierung, deren Wert bei Multiplikation des Arguments mit der Matrix abnimmt. Dann wählen wir  $U$  so klein, dass die Linearisierung nahe genug bei  $F$  ist, sodass die Ungleichung (b) noch richtig ist.

Die quadratische Form  $g$  kann man (im Fall  $x_0 = 0$ ) wählen als

$$g(x) := \sum_{i=0}^{\infty} \|F'(x_0)^i(x)\|^2.$$

$\square$

Die Existenz einer Funktion  $g$  wie in Satz 6.13 hat zur Folge, dass  $x_0$  ein asymptotisch stabiler Fixpunkt ist.

Es sei  $k \in \mathbb{N}$ . Eine  $k$ -tupel  $(x_1, \dots, x_k) \in X$  heißt  $k$ -Zykel, wenn  $F(x_i) = x_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, k-1$  und  $F(x_k) = x_1$  gilt. Jedes der  $x_i$  ist dann ein Fixpunkt der Funktion  $F^k : X \rightarrow X$ . Die Begriffe hyperbolisch, stabil, und asymptotisch stabil, sowie der obige Satz lassen sich verallgemeinern auf  $k$ -Zykel. Man kann zeigen, dass die  $k$  Fixpunkte von  $F^k$  entweder alle oder keiner stabil bzw. asymptotisch stabil sind, und dass die Eigenwerte der Jacobi-Matrix von  $F^k$  übereinstimmen.

**Beispiel 6.14.** Es sei  $\lambda \in [2, 4]$  und  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \lambda x(1-x)$ . Wir untersuchen die rekursive Folge  $(x_k)_k$ ,  $x_{k+1} = F(x_k)$ , in Abhängigkeit von  $\lambda$  und vom Startwert  $x_0$ .

Die Funktion  $F$  bildet  $(-\infty, 0]$  auf sich selbst ab. In diesem Bereich ist  $F$  monoton steigend und erfüllt  $F(x) < x$  für alle  $x \in (-\infty, 0)$ . Wenn  $x_0 \in (-\infty, 0)$  ist, dann ist daher die Folge  $(x_k)_k$  streng monoton fallend. Sie kann nicht konvergent sein, denn in  $(-\infty, 0)$  hat  $F$  keinen Fixpunkt, daher geht die Folge gegen  $-\infty$ .

Wenn der Startwert  $x_0$  grösser als 1 ist, dann ist  $x_1 \in (-\infty, 0)$  und die Folge geht ebenfalls gegen  $-\infty$ .

Das Intervall  $[0, 1]$  wird auf sich selbst abgebildet, die Folge ist daher beschränkt und hat zumindest einen Häufungspunkt. Die Randpunkte sind einfach: 0 ist ein Fixpunkt und führt zu einer konstanten Folge, und 1 wird auf 0 abgebildet und die Folge ist ab dem zweiten Glied konstant. Falls  $\lambda = 2$  ist, gilt  $F(x) < x$  für  $x \in (0, 1)$ , daher konvergiert die Folge gegen den linken Randpunkt 0.

Für  $\lambda \in (2, 4]$  existiert ein zweiter Fixpunkt an der Stelle  $y_1 := \frac{\lambda-1}{\lambda}$ . Die Ableitung  $F'$  ist an dieser Stelle gleich  $2 - \lambda$ , also ist  $y_1$  für  $\lambda \neq 3$  ein hyperbolischer Fixpunkt. Für  $\lambda \in (2, 3)$  ist er asymptotisch stabil.

Sei nun  $\lambda > 3$ . Dann hat  $F^2$  vier Fixpunkte. Darunter sind die zwei schon bekannten Fixpunkte von  $F$ . Die anderen beiden

$$y_2 = \frac{\lambda^2 + \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}, y_3 = \frac{\lambda^2 + \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda - 3}}{2\lambda}$$

bilden einen Zweierzyklus  $(y_2, y_3)$ . Das Produkt der beiden Ableitungen ist gleich  $-\lambda^2 + 2\lambda + 4$ . Falls  $\lambda < \sqrt{6} + 1 \approx 3.45$  ist, ist der 2-Zyklus asymptotisch stabil.

Für  $\lambda > \sqrt{6} + 1$  ist der 2-Zyklus ebenfalls hyperbolisch, aber instabil. Man kann zeigen, dass  $F$  dann einen 4-Zyklus hat, der für kleine  $\lambda$  (aber immer noch größer als  $\sqrt{6} + 1$ ) asymptotisch stabil ist. Wird  $\lambda$  größer, dann wird der 4-Zyklus wieder instabil und es entsteht ein stabiler 8-Zyklus. Dieser wird dann wieder instabil etc.

Die Abstände bis zur nächsten Periodenverdopplung werden immer kürzer. Die Folge der Quotienten der Abstände konvergiert, und der Grenzwert heisst *Feigenbaum-Konstante*.

Bei  $\lambda \approx 3.57$  existieren alle Zyklen, deren minimale Periode eine Potenz von 2 ist. Geht man mit  $\lambda$  noch weiter nach oben, so entstehen Zyklen mit minimaler Periode  $k$  für jede positive ganze Zahl  $k$ .

In welcher Reihenfolge entstehen die minimalen Perioden von Zyklen? Das wird durch folgenden Satz (den wir nicht beweisen werden) festgelegt.

**Satz 6.15** (Sharkowsky). *Es existiert eine Totalordnung  $\prec$  auf der Menge  $\mathbb{Z}_+$ , sodass für alle Zahlen  $m \prec n$  gilt:*

- 1) *Wenn eine stetige Funktion  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  einen Zykel von minimaler Periode  $n$  hat, dann hat  $f$  auch einen Zykel von minimaler Periode  $m$ .*
- 2) *Es existiert eine stetige Funktion  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die einen Zykel von minimaler Periode  $m$ , aber keinen Zykel von minimaler Periode  $n$  hat.*

Die Sharkowsky-Ordnung hat eine kleinste Zahl, 1, und eine größte Zahl, 3. Jede Funktion, die überhaupt einen Zykel hat, hat auch einen Fixpunkt. Jede Funktion mit einem Zykel mit minimaler Periode 3 hat Zyklen von beliebiger minimaler Periode.

Wir brauchen noch zwei Verallgemeinerungen für Funktionen, die nicht immer iteriert werden können. Es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $U \subset V$  offene Mengen, und  $F : U \rightarrow V$  offene Mengen. Wir definieren eine möglicherweise endliche, möglicherweise unendliche Folge  $(x_k)_k$  mit Startwert  $x_0$  durch die Rekursion  $x_{k+1} = f(x_k)$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ , für die die rechte Seite definiert ist. Wenn  $f(x_k) \notin U$ , dann bricht die Folge nach dem  $k$ -ten Glied ab.

**Lemma 6.16.** *Es sei  $y \in U$  ein hyperbolischer asymptotisch stabiler Fixpunkt. Dann existiert eine Umgebung  $W \subset U$  von  $y$ , sodass  $f(W) \subset W$  ist. (Es folgt, dass jede Folge mit Startwert in  $W$  gegen  $y$  konvergiert.*

*Beweis.* Wegen Satz (6.13) existiert eine offene Umgebung  $U'$  von  $y$  und eine stetige Funktion  $g : U' \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(z) > 0$  für alle  $z \in U' \setminus \{y\}$  und eine Konstante  $c \in (0, 1)$ , sodass  $g(F(z)) \leq g(z)$  für alle  $z \in U'$  gilt. Man wähle  $C > 0$  so, dass  $g$  am Rand von  $U'$  nicht kleiner als  $C$  ist, und setze  $W = \{z \mid g(z) < C\}$ .  $\square$

**Lemma 6.17.** *Es sei  $n = 1$ . Wir nehmen an, dass  $F$  monoton steigend ist. Es sei  $y$  ein Fixpunkt, sodass  $F(z) > z$  gilt für alle  $z < y$ ,  $z \in U$ . Dann konvergiert jede Folge mit Startwert kleiner als  $y$  gegen  $y$ .*

*Beweis.* Es sei  $V = \{z \in U \mid z < y\}$ . Es sei  $(x_k)_k$  eine Folge mit Startwert in  $V$ . Mit Induktion nach  $k$  zeigt man  $x_k \in V$  und insbesondere auch, dass die Folge nicht abbricht. Ausserdem ist sie monoton wachsend. Aus monoton wachsend und beschränkt folgt konvergent. Der Grenzwert ist ein Fixpunkt. In  $V$  existieren aber keine Fixpunkte, also kann der Grenzwert nur der Randpunkt  $y$  sein.  $\square$

**Aufgabe 6.1.** Zeige den Satz von Hartmann/Grobmann für den Fall, dass alle Eigenwerte positiven Realteil haben:

Zeige dazu, dass  $x_0$  instabil ist, wenn es eine differenzierbare Funktion  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  und einer Umgebung  $U$  von  $x_0$  mit folgenden Eigenschaften gibt:

- $g(x_0) = 0$  und  $g(x) > 0$  für  $x \in U \setminus \{x_0\}$ ;
- $\partial_F(g)(x) > 0$  für  $x \in U \setminus \{x_0\}$ .

Zeige weiters die Existenz von  $g$  und  $U$ .

**Aufgabe 6.2.** Die Systeme

$$F_1(x, y) = (y - x^3, -x - y^3), \quad F_2(x, y) = (y + x^3, -x + y^3)$$

sind Störungen des linearen Systems  $F(x, y) = (y, -x)$ . Zeige, dass jedes der drei Systeme  $(0, 0)$  als einziges Equilibrium hat und zeige, dass der Ursprung für  $F_1$  asymptotisch stabil, für  $F_2$  instabil und für  $F$  stabil (und nicht asymptotisch stabil) ist.

Hinweis: Für  $F_1$  kann eine Ljapunov-Funktion bzw. für  $F_2$  Aufgabe 6.1 verwendet werden.

## 7 Die Poincare-Rückkehrabbildung

Zurück zum kontinuierlichen Fall: es sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend,  $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Es sei  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar, sodass es keine offene Teilmenge von  $X$  gibt, auf der  $g$  konstant ist. Die Nullstellenmenge einer solchen Menge nennen wir *Hyperfläche*. Die Hyperfläche  $H$  heißt transversal zu  $F$  in einem Punkt  $p \in H$ , wenn  $\delta_F(g)(p) \neq 0$  ist; geometrisch bedeutet das, dass der Vektor  $F(p)$  nicht in der Tangentialhyperebene bei  $p$  liegt. Wenn  $H$  transversal zu  $F$  bei  $p$  ist, dann ist  $H$  auch transversal in einer Umgebung von  $x$ , weil die Transversalität durch eine Ungleichung mit einer stetigen Funktion definiert ist.

Transversale Hyperebenen sind schon einmal vorgekommen, nämlich bei der Konstruktion einer Transformation eines Vektorfelds bei einem Nicht-Equilibrium zu einem konstanten Vektorfeld. Es sei  $p_0 \in H$  ein Punkt der transversalen Hyperfläche. Wir haben eine Umgebung  $U$  von  $p_0$  konstruiert und einen Homöomorphismus  $\tau : U \rightarrow V$  von einer Umgebung  $U$  nach  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen, der  $H$  in eine Hyperebene und das Vektorfeld in ein konstantes Vektorfeld transformiert. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Hyperebene gegeben die erste Koordinatenhyperebene  $E := \{(0, \dots, x_n) \in U \mid x_i \in \mathbb{R}\}$  ist, und dass das Vektorfeld konstanten Wert  $(1, 0, \dots, 0)$  hat.

Es sei  $U \subset X$  offen und  $H \subset U$  eine Hyperebene, die in jedem Punkt transversal ist. Die Poincare-Rückkehrabbildung ordnet jedem Punkt  $p$  in  $H$  dem Punkt  $p' \in H$  zu, bei dem der Orbit durch  $p$  das erste Mal wieder auf  $H$  trifft:

$$r := \min\{t > 0 \mid \varphi(t, p) \in H, \Phi(p) = \varphi(r, p)\}.$$

Wenn der Orbit durch  $p$  nicht mehr auf  $H$  trifft, dann ist  $\Phi(p)$  nicht definiert.

**Satz 7.1.** *Der Definitionsbereich der Poincare-Rückkehrabbildung ist offen. Die Abbildung ist stetig differenzierbar. Ihre Ableitung hat in jedem Punkt positive Determinante.*

*Proof.* Es sei  $p \in H$  ein Punkt, auf dem  $\Phi$  definiert ist, und  $r := \min\{t > 0 \mid \phi(t, p) \in H\}$ . Es sei  $\tau : U \rightarrow V$  eine Transformation, die  $H$  auf eine horizontale Hyperebene  $E$  und  $F$  auf ein vertikales Vektorfeld transformiert (für die Definition muss  $U$  eventuell durch eine kleinere Umgebung ersetzt werden; das macht aber nichts aus, weil die Aussagen des Satzes nicht von der Wahl der Umgebung abhängen). Die Flussabbildung  $\varphi_r$  ist stetig differenzierbar und definiert in einer offenen Umgebung von  $U_1$  von  $x$ . Wir setzen  $V := \tau(U_1)$ . Wir definieren die Abbildung  $P : V_1 \rightarrow V$  als  $\tau \circ \phi_r \circ \tau^{-1}$ . Die Poincare-Abbildung steckt als Teilfunktion in  $P$  drin: wenn wir  $P$  schreiben als  $(x_1, x_{2\dots n}) \rightarrow (P_1(x_1, x_{2\dots n}), P_{2\dots n}(x_1, x_{2\dots n}))$ , dann ist  $\Phi = \tau^{-1} \circ P_2|_E \circ \tau$ . Es folgt, dass  $\Phi$  auf einer offenen Umgebung definiert ist und fort stetig differenzierbar ist.

Weil  $\tau$  ein Diffeomorphismus ist, ist die Jacobi-Determinante von  $\tau$  im ganzen Definitionsbereich entweder positiv oder negativ. Die differenzierbare Abbildung  $\phi_r$  hat Jacobi-Determinante ungleich 0, weil sie invertierbar ist (die inverse Abbildung ist  $\phi_{-r}$ ). Für beliebige  $t$  ist die Jacobi-determinante von  $\phi_t$  ungleich 0. Die Funktion  $t \mapsto \det(\phi'_t)(x)$  hat also keine Nullstellen, ist stetig und hat bei  $t = 0$  den Wert 1 – also ist die Jacobi-Determinante

bei von  $\phi_r$  positiv. Daher ist die Jacobideterminante von  $P$ . Die erste Zeile von  $P'$  ist aber gleich dem transformierten Vektor  $(1, 0, \dots, 0)$ . Daher ist auch die Jacobideterminante von  $\Phi$  positiv.  $\square$

**Bemerkung 7.1.** Die folgende Umkehrung von Satz 7.1 gilt ebenfalls: wenn  $V \subset V \subset \mathbb{R}^n$  offen und einfach zusammenhängend sind (d.h. eine Löcher haben), und  $G : V \rightarrow U$  eine stetig differenzierbare Abbildung mit positiver Jacobi-Determinante ist, dann existiert ein Vektorfeld und eine transversale Hyperebene, sodass  $G$  die Poincare-Abbildung ist.

Die periodischen Orbits von  $\Phi$  sind gleichzeitig die periodischen Orbits von  $F$ , die  $H$  schneiden. Jeder  $k$ -Zykel von  $F$  entspricht einer geschlossenen Integralkurve, die  $H$   $k$  mal schneidet. Wir können also nun auch von stabilen /asymptotisch stabilen/hyperbolischen  $k$ -Zyklen sprechen. Hyperbolische asymptotisch stabile Zyklen sind sogar strukturell stabil: wenn man ein Vektorfeld mit einem hyperbolischen asymptotisch stabilen Zyklus geringfügig stört, bekommt man wieder einen hyperbolischen asymptotisch stabilen Zyklus, der zum ursprünglichen topologisch äquivalent ist.

**Bemerkung 7.2.** Die Tatsache, dass asymptotisch stabile Zyklen strukturell stabil sind, ist eine mathematische Erklärung dafür, dass in vielen dynamischen Systemen, die von so vielen Parametern abhängen, dass man immer von Störungen ausgehen muss, periodische Phänomene auftreten.

Im Gegensatz dazu ist das Modell von Lotka/Volterra in Beispiel 6.6 nicht strukturell stabil. Wenn man hier die Differentialgleichung nur geringfügig stört, hat man nicht mehr das gleiche Verhalten (dass fast jeder Orbit stabil ist).

## 7.1 Der Satz von Poincare/Bendixsohn

In diesem Kapitelabschnitt nehmen wir  $n = 2$  an. Dieser Fall ist speziell, weil die Poincare-Rückkehrabbildung streng monoton steigend ist. Durch die Monotonie kann man auch dann Stabilität von Fixpunkten nachweisen, wenn man nichts über die Jacobi-Matrix von  $\Phi$  weiß.

**Satz 7.2.** *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, und  $K \subset U$  eine kompakte Teilmenge. Wir nehmen an, dass  $F$  keine Equilibrien in  $K$  hat. Es sei  $p \in K$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow K$  die Lösung des Anfangswertproblems mit Anfangswert  $f(0) = p$ ; wir nehmen an, dass die Lösung den Rand von  $K$  nicht erreicht. Dann existiert ein periodischer Orbit  $Z$ , sodass für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $t > 0$  existiert, sodass der Abstand von  $f(t)$  und  $z$  kleiner als  $\epsilon$  ist.*

*Proof.* Es sei  $\delta > 0$ . Wir überdecken  $K$  durch offene Mengen  $U_i$  und wählen in jeder offenen Teilmenge  $U_i$  eine transversale Hyperfläche  $H_i$ , sodass folgendes gilt:

- Für jedes  $i$  existiert eine Transformation  $\tau_i : U_i \rightarrow V_i$ , die  $H_i$  in eine horizontale Ebene  $E_i$  und  $F$  in das konstante vertikale Vektorfeld transformiert.
- die vertikale Höhe von  $V_i$  ist kleiner oder gleich  $\delta$ .



- Jede senkrechte Gerade, die  $V_i$  schneidet, schneidet sie auch in  $E_i$ .

Wegen der Kompaktheit von  $K$  können wir annehmen, dass die Überdeckung endlich ist. Es sei  $N$  die Anzahl der Teilmengen.

Aus der zweiten Bedingung für die offenen Mengen  $U_i$  folgt, dass die Bahn höchstens eine Zeit  $\delta$  in  $U_i$  bleiben kann. Es folgt, dass es zumindest eine offene Teilmenge – sagen wir  $U_1$  – geben muss, die unendlich oft von  $C$  aufgesucht wird, und für die der Limes inferior der Umlaufzeiten, also der Zeitspannen, die benötigt werden, um wieder auf  $H_1$  zu treffen, kleiner als  $(N + 1)\delta$  ist. Also gibt es auch eine unendliche Folge  $(p_k)_k$ , die eine Rekursionsgleichung mit der Poincare-Abbildung erfüllt. Die Folge ist beschränkt und monoton (steigend oder fallend) bezüglich einer Totalordnung auf  $H$ , die von einer Parametrisierung induziert ist. Also ist die Folge konvergent. Wir definieren  $q$  als den Grenzwert und  $t_i$  so, dass  $f(t_k) = p_k$  ist.

Da der Limes inferior der Folge Umlaufzeiten  $(t_{i+1} - t_i)_i$  beschränkt ist, existiert eine konvergente Teilfolge gegeben durch  $(i_j)_j$ . Es sei  $S := \lim_{j \rightarrow \infty} (t_{i_j+1} - t_{i_j})$  der Grenzwert der Umlaufzeiten. Dann ist

$$\varphi(S, q) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi(t_{i_j+1} - t_{i_j}, p_{i_j}) = \lim_{i \rightarrow \infty} p_{i_j+1} = q.$$

Insbesondere ist der Orbit durch  $q$  geschlossen. Das ist unser  $Z$ . Der Abstand von  $p_i$  zu  $Z$  geht gegen Null, und der Abstand von jedem anderen Punkt  $f(t), t > t_i$  ist beschränkte durch den Abstand von  $p_i$  zu  $Z$  mal  $e^{LS}$ , wobei  $L$  eine Lipschitz-Konstante von  $F$  ist; also geht auch dieser Abstand gegen Null.  $\square$

Ein Zykel, der die Eigenschaft wie oben hat, dass sich ein anderer Orbit asymptotisch an diesen annähert, heisst Grenzykel. Ein Grenzykel muss nicht asymptotisch stabil sein. Um hier ein Beispiel zu konstruieren, werden wir ein Vektorfeld zu einer vorgegebenen Poincare-Abbildung konstruieren. Nicht ganz, wir geben nur das asymptotische Verhalten von  $\Phi$  vor – Fixpunkte, und zwischen den Fixpunkten, ob  $\Phi(x)$  größer oder kleiner als  $x$  ist.

Wir setzen  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ,  $U = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ , und  $H = \{(x, 0) \mid x > 0\}$ . Es sei  $g : (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  eine Funktion mit vorgegebenen Nullstellen und vorgegebenen Vorzeichen zwischen den Nullstellen. Wir definieren das Richtungsfeld

$$F : X \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (g(\sqrt{x^2 + y^2})x + y, g(\sqrt{x^2 + y^2})y - x).$$

Die Transformation in Polarkoordinaten  $(x, y) = (r \cos(w), r \sin(w))$  ist

$$G : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, w) \mapsto (g(r)r, 1).$$

Die Lösungen haben daher konstante Winkelgeschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn, und der Radius  $t \mapsto R(t)$  folgt der Differentialgleichung

$$\forall t : R'(t) = g(R(t))R(t)\forall t.$$

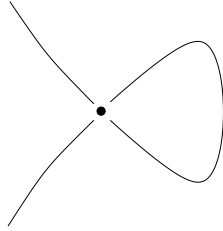


Abbildung 3: Die Nullstelle von  $g$  wird durch das Equilibrium in drei Teilkurven zerlegt. Eine davon ist ein homokliner Orbit.

Das Phasendiagramm dieser skalaren Differentialgleichung richtet sich nach den Nullstellen und den Vorzeichen von  $g$ . Die Fixpunkte von  $\Phi$  sind die Equilibrien der skalaren Differentialgleichung.

Um einen Grenzykel, der nicht asymptotisch stabil ist, zu konstruieren, wählen wir eine Funktion, die eine Nullstelle hat, aber bei der Nullstelle das Vorzeichen nicht ändert:  $g : r \mapsto (1 - r^2)^2$ . Jeder Startwert innerhalb des Einheitskreises hat dann einen Orbit, der gegen den Grenzykel – den Einheitskreis – “konvergiert”; Orbits mit Startwerten ausserhalb driften nach aussen und sind unbegrenzt.

Wenn das kompakte Gebiet  $K$  Quellen oder Senken enthält, gilt der Satz auch noch. Quellen wirken sich nur insofern aus, dass bei einem Startwert genau an der Quelle eine konstante Lösung herauskommt, aber das verträgt sich mit der Schlussfolgerung des Satzes. Bei Senken kann es vorkommen, dass die Lösung gegen die Senke konvergiert; das ist auch okay. Kritisch sind Sattelpunkte.

Eine auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösung  $f : \mathbb{R} \rightarrow K$  heißt *klin*, wenn  $\alpha := \lim_{t \rightarrow -\infty} f(t)$  und  $\omega := \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$  beide existieren, wenn  $\omega$  nicht asymptotisch stabil ist, und wenn  $\alpha$  nicht asymptotisch stabil für das umgedrehte Vektorfeld  $-F$  ist. Also Sattelpunkte oder nichthyperbolische Equilibrien, die sich ähnlich wie Sattelpunkte verhalten. Wenn  $\alpha = \omega$  ist, nennen wir die Lösung homoklin, und wenn  $\alpha \neq \omega$ , dann nennen wir sie heteroklin.

**Beispiel 7.3.** Es sei  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x, y) \mapsto y^2 - x^2 + x^3$ . Wir definieren das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \left( -\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}, \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} \right).$$

Dann ist  $\delta_F(g)(x, y) = 0$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}$ . Das bedeutet, der Wert von  $g$  ist entlang jeder Lösung konstant. Wir interessieren uns für Lösungen mit Wert 0.

Die Nullstelle  $Z$  von  $g$  enthält das einzige Equilibrium  $p_0 = (0, 0)$ ; die Jacobi-Matrix bei  $p_0$  zeigt, dass es sich um einen Sattelpunkt handelt. Der Sattelpunkt zerlegt  $Z$  in drei Kurven – siehe Figur 3. Nachdem auf diesen Kurven keine Haltstellen mehr sind, sind es drei Orbits – zusammen mit dem konstanten Orbit  $p_0$  sind es also vier. Eine von den drei Kurven ist beschränkt: es ist ein homokliner Orbit, bei dem  $\alpha = \omega = p_0$  ist.

Im obigen Beispiel gibt es unendlich viele Zyklen. Homokline Orbits können aber auch,

gemeinsam mit  $\alpha = \omega$ , eine geschlossene Kurve bilden, an die sich andere Bahnen asymptotisch annähern. Hier ist die stärkste Version des Satzes von Poincare/Bendixsohn.

**Satz 7.4.** *Es sei  $U \subset \mathbb{R}^2$  offen,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld, und  $K \subset U$  kompakt. Es sei  $p \in K$  und  $f : \mathbb{R} \rightarrow K$  die Lösung des Anfangswertproblems mit Anfangswert  $f(0) = p$ ; wir nehmen an, dass die Lösung den Rand von  $K$  nicht erreicht. Dann existiert eine zusammenhängende Menge  $Z$ , die entweder eine Vereinigung von endlich vielen Equilibrien, homoklinen und heteroklinen Orbits ist, oder unendlich viele Equilibrien enthält, sodass für jedes  $\epsilon > 0$  ein  $s > 0$  existiert, sodass für alle  $t > s$  der Abstand von  $f(t)$  zu  $Z$  kleiner als  $\epsilon$  ist.*

Kline Orbits sind nicht strukturell stabil, sie gehen verloren wenn das Vektorfeld durch kleine Störungen geringfügig verändert wird. Zu jedem Sattelpunkt existieren vier spezielle Orbits, zwei ausgehende und zwei eingehende, alle anderen Orbits sind “hyperbelartig” und gehen an irgendeiner Seite vorbei. Für einen kline Orbit braucht es einen Orbit der gleichzeitig ausgehender Orbit eines Sattelpunktes und eingehender Orbit eines anderen oder auch desselber Sattelpunktes ist. Bei einer kleinen Störung trifft der ausgehende des ersten Sattelpunktes nicht mehr genau auf den zweiten und geht knapp vorbei.

Strukturelle Stabilität ist im zweidimensionalen Fall ein generisches Phänomen: fast alle Vektorfelder sind auf kompakten Teilmengen strukturell stabil. Um diese Aussage mathematisch exakt zu formulieren, bräuchte es eine Topologie auf der Menge aller stetig differenzierbaren Vektorfelder. In Dimension 2 ist ein Vektorfeld genau dann stabil, wenn es folgende Eigenschaften erfüllt.

- Alle Equilibrien sind hyperbolisch.
- Die Fixpunkte der Poincare-Abbildungen, die periodischen Orbits entsprechen, sind alle hyperbolisch.
- Es gibt keine kline Orbits.

## 7.2 Chaos

Der geometrische Grund für die sehr starken strukturellen Aussagen im zweidimensionalen Fall ist, dass die Poincare-Rückkehrabbildung eine monotone Abbildung ist, und das schränkt die Möglichkeiten stark ein. Bei einem dreidimensionalen Vektorfeld ist die Poincare-Rückkehrabbildung eine stetig differenzierbare Abbildung eines Gebietes in der Ebene auf sich selbst, deren Jacobi-Determinante überall positiv ist; und jede solche Abbildung kann als Poincare-Rückkehrabbildung auftreten. Und es gibt solche Abbildungen, deren Verhalten unter Iteration “chaotisch” ist.

Die Hufeisenabbildung  $h$  ist eine Abbildung von einer offenen Menge  $U$ , die homöomorph zu einer offenen Kreisscheibe ist, wird durch Abbildung 4 beschrieben werden. Sie ist injektiv und kann beliebig oft iteriert werden. Jedem Punkt können wir eine unendliche Folge von Symbolen aus  $\{Y, B, G\}$  zuordnen, die angibt, in welchem der drei Teilgebiete

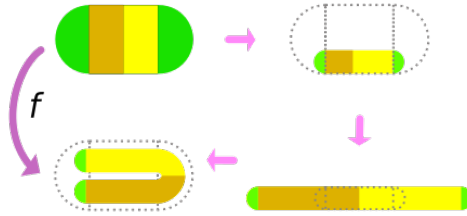


Abbildung 4: Die Hufeisen-Abbildung. Quelle: [https://en.wikipedia.org/wiki/Horseshoe\\_map](https://en.wikipedia.org/wiki/Horseshoe_map)

die Iterationen liegen. Das grüne Gebiet ist ein Fangbereich, also sobald eine Folge einmal ein  $G$  hat, kommen nur mehr  $G$ 's. Das ist aber auch schon die einzige Bedingung: jede andere Folge ist möglich, speziell alle Folgen, die nur die Symbole  $Y$  und  $B$  enthalten.

Es sei  $Z \subset U$  die Menge aller Punkte, deren Iteration immer gelb oder braun (also nie grün) sind, und die ausserdem im Bild von jeder Abbildung der Form  $h^k : U \rightarrow U$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , liegen. Jedem solchen Punkt  $p$  kann man eine Funktion  $z : \mathbb{Z} \rightarrow \{Y, B\}$  zuordnen:  $z(k)$  ist die Farbe des Punktes  $h^k(p)$ . Man kann nun zeigen, dass jede Funktion  $z : \mathbb{Z} \rightarrow \{Y, B\}$  tatsächlich auftritt, und zwar immer nur für einen einzigen Punkt in  $Z$ .

Nun ist es eine Übungsaufgabe, die Zyklen mit festgelegter Minimalperiode zu bestimmen. Diese müssen in  $Z$  liegen und entsprechen daher  $\{Y, B\}$ -Funktionen. Anwendung von  $h$  entspricht dem Shift nach rechts.

Die Menge  $Z$  ist abgeschlossen, und man kann zeigen, dass die Zyklen in  $Z$  dicht liegen. Das ist eines der drei Eigenschaften der Definition von Chaos (Dichtheit periodischer Orbits). Ein konkretes Vektorfeld, das ebenfalls chaotische Merkmale hat, ist die Lorenz-Gleichung, gegeben durch das Vektorfeld

$$L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (-s(x - y), rx - y - xz, xy - bz), \quad r = 28, s = 10, b = \frac{8}{3}.$$

Um einen Fangbereich zu bestimmen, definieren wir

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto rx^2 + sy^2 + s(z - 2r)^2.$$

Ihre vektorielle Ableitung ist

$$\partial_L(g)(x, y, z) = -2s((rx^2 + y^2 + b(z - r)^2 - br^2).$$

Es sei  $E := \{p \mid \partial_L(g)(p) \geq 0\}$ . Das ist das ein Voll-Ellipsoid, daher kompakt. Wir wählen  $M$  so, dass  $K := \{p \mid g(p) \leq M\}$  die Menge  $E$  enthält – also  $M := \max\{g(p) \mid p \in E\}$ . Für jede Lösung  $f$  mit Startwert in  $K$  ist  $f(t) \in K$ . Um diese Behauptung zu beweisen, nehmen wir indirekt an, dass ein  $t_1 > 0$  existiert, sodass  $f(t_1) \notin K$  gilt. Die Funktion  $h := g \circ f : [0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$  hätte dann folgende Eigenschaften:

- Wenn  $h'(t) \geq 0$  ist, dann folgt  $f(t) \in E \subset K$  und daher  $h(t) \leq M$ .
- $h(0) \leq M$  und  $h(t_1) > M$ .

So eine Funktion kann es nicht geben (warum nicht?). Also ist  $K$  ein Fangbereich, aus dem die Lösungen nicht mehr entkommen.

Das Lorenz-Feld hat in  $K$  drei Equilibrien. Alle drei sind Sattelpunkte. Der Nullpunkt hat den Typ  $(2, 1)$ , und zwei andere haben den Typ  $(1, 2)$ . Die beiden letzteren haben komplexe Eigenwerte; Orbits in der Nähe kreisen fast in einer Ebene spiralg nach außen, bis zu vom jeweils anderen Equilibrium "eingefangen werden". Die Menge  $Z := \bigcap_{t>0} \varphi(t, K)$  ist eine zusammenhängende abgeschlossene fraktale Menge, die im Abschluss von jedem Orbit liegt.

## 8 Ausblick: Differentialgeometrie

Differentialgeometrie könnte man definieren als das Teilgebiet der Geometrie, die Funktionen/Eigenschaften untersucht, die unter Diffeomorphismen erhalten bleiben. Ein wesentlicher Grundsatz in der Geometrie (den auch die theoretische Physik übernommen hat) ist: die geometrischen Sätze und Definitionen sind unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Je nachdem welche Koordinatentransformationen bekommt man verschiedene Teilgebiete der Geometrie: euklidische Geometrie, affine Geometrie (bekannt aus LA-Vorlesung), projektive Geometrie, Topologie, algebraische Geometrie, Differentialgeometrie. Die Mitspieler bei der Differentialgeometrie sind: offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$ , differenzierbare Abbildungen, glatte Hyperflächen oder Teilmannigfaltigkeiten, und vor allem: Vektorfelder.

Equilibrien, Zyklen, Stabilität etc. sind alles differentialgeometrische Eigenschaften von Vektorfeldern, die bei Koordinatentransformation erhalten bleiben. Auch die vektorielle Ableitung einer Funktion wird wieder in die vektorielle Ableitung der transformierten Funktion bezüglich des transformierten Vektorfelds transformiert. Also ist die vektorielle Ableitung ein Element der Differentialgeometrie. Hier ist ein erstes einfaches Beispiel für einen allgemeinen differentialgeometrischen Satz:

**Proposition 8.1.** *Für jedes Vektorfeld ist die Abbildung  $\partial_F$  linear über  $\mathbb{R}$  und erfüllt die Leibniz-Regel*

$$\partial_F(fg) = f\partial_F(g) + \partial_F(f)g.$$

für alle stetig differenzierbaren Funktionen  $f, g$ .

Diese Proposition läßt sich auch umkehren: wenn eine Operation, die jeder stetig differenzierbaren Funktion eine stetige Funktion zuordnet, linear ist, die Leibniz-Regel erfüllt, und stetig in Parametern von  $g$  ist, dann ist sie eine vektorielle Ableitung eines eindeutig definierten Vektorfeldes.

Als Prinzip gilt: man kann alles ableiten, was Werte in einem Vektorraum hat. Insbesondere gibt es die vektorielle Ableitung von Vektorfeldern: wenn  $F, G$  zwei stetig differenzierbare Vektorfelder sind, dann ist  $\partial_F(G)$  wieder ein Vektorfeld - in der Regel nur stetig, nicht mehr differenzierbar. Um die Schwierigkeit zu vermeiden, dass man bei jedem Differenzieren eine Ordnung in der Differenzierbarkeit verliert, ist es üblich, von vornherein bei allen Funktionen und Vektorfeldern anzunehmen, dass die beliebig oft differenzierbar sind. Statt  $\partial_F(G)$  schreibt man auch  $[F, G]$ .

**Proposition 8.2.** *Die vektorielle Ableitung von Vektorfeldern ist bilinear und erfüllt die Regeln*

$$[F, G] = -[G, F], \quad [F, [G, H]] + [G, [H, F]] + [H, [F, G]] = 0,$$

$$[G, fH] = f[G, H] + \partial_G(f)H$$

für alle Vektorfelder  $F, G, H$  und Funktionen  $f$ .

Wenn  $V$  ein Vektorraum ist und  $[\cdot, \cdot] : V^2 \rightarrow V$  eine bilineare Abbildung ist, die die erste Zeile erfüllt, dann heißt  $(V, [\cdot, \cdot])$  eine *Lie-Algebra*. Die Abbildung nennt man auch *Lie-Klammer*. Wenn  $G$  konstant ist, dann muss  $[F, G] = \partial_F(G)$  nicht unbedingt Null sein (eine Transformation von  $F$  entlang  $G$  kann ja nicht-konstante Felder ergeben). Wenn  $F$  und  $G$  beide konstant sind, dann ist allerdings  $[F, G] = 0$ . Wir nennen zwei Vektorfelder  $F, G$  transversal, wenn für jeden Punkt  $p$  die beiden Vektoren  $F(p)$  und  $G(p)$  linear unabhängig sind. Hier ist eine Verallgemeinerung der in Kapitel 11 bewiesenen Behauptung, dass jedes Vektorfeld in einem Nicht-Equilibrium lokal equivalent zu einem konstanten Vektorfeld ist.

**Satz 8.3.** *Zwei transversale Vektorfelder  $F, G$  erfüllen genau dann  $[F, G] = 0$ , wenn es für jeden Punkt eine lokale Transformation gibt, die  $F$  und  $G$  gleichzeitig in konstante Felder transformiert.*

Nun zum Problem der Gradientenfelder. Wenn  $X \subset \mathbb{R}^2$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar ist, dann nennen wir

$$\text{grad}(f) : (x, y) \mapsto \left( \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right)$$

das Gradientenfeld von  $f$ . Die stabilen Equilibrien sind genau die lokalen Maxima von  $f$  – diese Tatsache nützt man sich in der numerischen Optimierung aus, weil stabile Equilibrien leicht zu finden sind. Das Problem mit den Gradientenfeldern ist, dass die Eigenschaft, Gradientenfeld zu sein, nicht unter Koordinatentransformationen erhalten bleibt.

**Beispiel 8.4.** Es sei  $f : (x, y) \mapsto xy$ . Dann ist  $F(x, y) = \text{grad}(f)(x, y) = (y, x)$ . Wir setzen  $(u, v) = (2x, y)$ . In  $uv$ -Koordinaten ist  $F^t(u, v) = (2v, u/2)$ . Die zweite partielle Ableitung der ersten Komponente ist verschieden von der ersten partiellen Ableitung der zweiten Komponente, also ist  $F^t$  kein Gradientenfeld.

Die transformierte Funktion ist  $f^t(u, v) = uv/2$ . Das Gradientenfeld der transformierten Funktion stimmt nicht mit dem transformiertem Vektorfeld überein.

Eine geometrische Eigenschaft des Gradientenfeldes ist, dass der Vektor in jedem Punkt normal auf die Niveaulinie von  $f$  steht. Dass diese Eigenschaft bei Transformationen nicht erhalten bleibt, ist einleuchtend: Transformationen erhalten in der Regel nicht die Normalität.

Des Rätsels Lösung ist, dass die Werte des Gradientenfeldes nicht im Tangentialraum liegen, sondern im Dualraum dazu. Solche “Ko-Vektorfelder” heißen *Differentialformen*. Die Schreibweise für Differentialformen

$$\eta = F_1(x, y)dx + F_2(x, y)dy$$

passt zur Transformationsformel: für  $x$  und  $y$  ersetze man die entsprechenden Funktionen in  $u$  und  $v$ , und  $dx$  und  $dy$  wird ersetzt durch die Gradienten von diesen Funktionen. Vektorfelder und Differentialformen sind beides stetig differenzierbare Formen von  $X$  nach  $\mathbb{R}^2$ , aber unterscheiden sich in vielen Eigenschaften und möglichen Operationen. Um diese kurz zu beschreiben, muss man erwähnen, dass die Differentialformen, die formal wie Vektorfelder aussehen, 1-Formen sind; differenzierbare Funktionen nach  $\mathbb{R}$  bezeichnet man als Null-Formen, und dann gibts auch noch 2-Formen (bis zur Dimension von  $X$ ). In  $xy$ -Koordinaten läßt sich jede 2-Form schreiben als  $f(x, y)dx \wedge dy$ , also jede 2-Form ist eindeutig gegeben durch eine Funktion – trotzdem werden 0-Formen und 2-Formen anderes transformiert und müssen daher unterschieden werden.

- Vektorfelder kann man nur entlang Diffeomorphismen transformieren. Die Transformationsformel für Differentialformen braucht nur die inverse Abbildung. Für jede differenzierbare Abbildung  $f : Y \rightarrow X$  und jede Differentialform  $\eta$  auf  $X$  ist die Transformation  $f^*(\eta)$  eine Differentialform auf  $Y$ .  $X$  und  $Y$  müssen nicht einmal die gleiche Dimension haben.
- Die algebraischen Operationen für Vektorfelder sind die Lie-Klammer und die vektorielle Ableitung. Für Differentialformen hat man das Hack-produkt und die äussere Ableitung  $d$ . Die äussere Ableitung einer 0-Form ist eine 1-Form (nämlich der Gradient), und die äussere Ableitung einer 1-Form ist eine 2-Form. Die äussere Ableitung einer 2-Form ist immer 0. Die äussere Ableitung erfüllt  $d^2 = 0$  und eine Analog zur Leibnizregel mit dem Hack-Produkt.
- Vektorfelder definieren Differentialgleichungen mit Integralkurven als Lösungen. Differentialformen kann man integrieren: für jede glatte Kurve  $C$  und Differentialform  $\eta$  existiert das Kurvenintegral  $\int_C \eta$ , eine reelle Zahl. Die Stokes-sche Integralformel verknüpft die Integration mit der äusseren Ableitung. Wenn  $\eta$  eine  $k$ -Form ist, und  $B$  eine kompakte Teilvarietät von Dimension  $k + 1$  mit glattem Rand, dann gilt

$$\int_{\partial B} \omega = \int_B d\omega.$$

Im Fall  $k = 0$  sagt die Stokes-sche Formel folgendes: wenn  $C \subset X$  eine Kurve von  $p$  nach  $q$  ist, und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, dann ist  $\int_C df = f(q) - f(p)$ . Das Integral hängt also nicht vom Integrationsweg ab, falls die Differentialform ein Gradient ist.

Eine positive 2-Form  $\omega$  definiert ein Maß auf  $X$ : jeder kompakten Teilmenge wird eine positive Zahl zugeordnet, nämlich das Integral von  $\omega$ . Wenn  $\omega = d\eta$  für eine 1-Form  $\eta$  ist, kann dieses Mass durch ein Kurvenintegral berechnet werden (Satz von Green, ein weiterer Spezialfall der Stokes-schen Formel).

Um eine bijektive Abbildung zwischen Vektorfelder und 1-Formen herzustellen, braucht man eine Art "lokale Dualität". Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: eine Riemmannsche Metrik oder eine symplektische Struktur.

Eine **Riemannsche Metrik** ist im wesentlichen ein lokales Skalarprodukt, positiv definit und symmetrisch. Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der lokal diffeomorph zu einer offenen Menge des  $\mathbb{R}^n$  ist und eine stetig differenzierbare Abbildung besitzt, die jedem Punkt eine symmetrische und positiv definite  $n \times n$  Matrix zuordnet. Die Länge einer differenzierbaren kompakten Kurve ist eine positive Zahl. Die Länge der kürzesten Verbindung zwischen zwei Punkten erfüllt alle Axiome einer Metrik, und das macht jede Riemannsche Mannigfaltigkeit zu einem metrischen Raum. Die kürzeste Verbindung wird auf Kurven erzielt, die “Geodätische” heißen und gewisse Differentialgleichungen erfüllen müssen. Die Geodätischen in der Ebene sind Geraden, die Geodätischen auf der Kugel die Großkreise. Eine Riemannsche Metrik definiert auch Winkel zwischen Kurven oder Vektorfeldern oder Volumina.

Insbesondere definiert eine Riemannsche Metrik eine Bijektion zwischen Vektorfeldern und 1-Formen. Jeder differenzierbaren Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  kann man dann zunächst eine Differentialform  $df$  und dann ein Vektorfeld zuordnen: das Gradientenfeld, wie wir es kennen. Der Satz, dass der Gradient normal auf die Niveaufunktionen  $f = \text{konstant}$  steht, gilt allgemein für Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Die stabilen Equilibrien der Gradientenfelds sind die lokalen Maxima von  $f$ .

Eine Frage in der Riemannschen Geometrie ist, ob zwei gegebene Riemannsche Mannigfaltigkeiten lokal equivalent sind: ob es einen Diffeomorphismus gibt, der Basispunkt in Basispunkt abbildet und der die erste Riemannsche Metrik in die zweite transformiert. Eine notwendige Bedingung ist, dass der Riemannschen Krümmungsskalar bei den Basispunkten den gleichen Wert hat. Dieser ist in der Ebene gleich 0 und bei einer Kugel vom Radius  $r$  gleich  $\frac{1}{r^2}$ , also sind Ebene und Kugel nicht lokal equivalent als Riemannsche Mannigfaltigkeiten.

In der allgemeinen Relativitätstheorie sind Riemannsche Pseudo-Metriken fundamental. Die sind genauso definiert wie Riemannsche Metriken, bis auf die Bedingung “positiv definit”. Die Matrizen müssen vollen Rang haben, dürfen aber indefinit sein. Die “Lorentz-Metrik” lässt sich in einer Basis lokal schreiben als Diagonalmatrix mit Einträgen  $-1, -1, -1, 1$ . Tangentialvektoren mit positivem Quadrat heißen zeitartig, mit Quadrat Null lichtartig, und mit negativem Quadrat raumartig. Die Bewegung eines relativistischen Teilchens in der vierdimensionalen Raumzeit ist eine Kurve mit zeitartiger Ableitung. Wenn keine Kräfte oder Kollisionen auf das Teilchen wirken, dann erfüllt die Kurve die gleiche Differentialgleichung wie eine Geodätische und heißt auch Geodätische. Allerdings ist sie nicht die kürzeste Verbindung, sondern die längste. Nun hat die Länge einer Geodätischen eine physikalische Interpretation: die Eigenzeit, also die Zeit, die das Teilchen messen würde, wenn es auf seiner Reise durch die Raumzeit eine Uhr mit sich führt. Daraus lässt sich das “Zwillingsparadoxon” ableiten.

Die zweite Möglichkeit, eine lokale Dualität zu definieren ist eine **symplektische Struktur**. Hier ordnet man jedem Punkt eine schiefsymmetrische und nichtsinguläre Matrix zu. Das geht nur, wenn der Raum  $X$  gerade Dimension hat (also etwa in der Ebene, aber nicht im dreidimensionalen Raum). Das Transformationsgesetz ist genau das gleiche wie bei 2-Formen  $\omega$ , daher kann man auch sagen eine symplektische Struktur ist eine 2-Form mit



bestimmten Eigenschaften (Nicht-Degeneriertheit und äußere Ableitung gleich Null). Wie im Fall einer Riemann-Metrik bekommt man eine Bijektion zwischen Vektorfeldern und 1-Formen. Ein Vektorfeld  $F$  heisst *hamiltonianisch*, wenn es die symplektische Struktur erhält, also wenn  $\partial_F(\omega) = 0$  ist. Ein Satz besagt, dass das genau dann der Fall ist, wenn die entsprechende Differentialform ein Gradient ist, also von der Form  $df$  für eine skalare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Wenn  $F$  ein hamiltonianisches Vektorfeld und  $f$  die entsprechende skalare Funktion ist, dann gilt immer  $\partial_F(f) = 0$ .

In der analytischen Mechanik kennt man viele Beispiele von diesen Paaren Funktion-Vektorfeld. Ein Vektorfeld  $F$ , das die symplektische Struktur erhält, wird in diesem Zusammenhang als *Symmetrie* bezeichnet. Für fixes  $t \in \mathbb{R}$  ist  $\varphi : X \rightarrow X$  ein Diffeomorphismus (mit Umkehrung  $\varphi_{-t}$ ), und nachdem  $\partial_F(\omega) = 0$  gilt, erhält jeder solche Diffeomorphismus die symplektische Struktur; streng genommen sind also die Flüsse die Symmetrien, aber man kann zeigen, dass jede eindimensionale Gruppe von Symmetrien der Fluss eines Vektorfelds ist; also ist es schon okay, hamiltonianische Vektorfelder und Symmetrien zu identifizieren. E. Nöther formulierte das folgende *physikalische Gesetz*:

Zu jeder Symmetrie läßt gehört eine Erhaltungsgröße; die Erhaltungsgröße ist eindeutig bis auf eine additive Konstante.

**Beispiel 8.5.** Die meisten physikalischen Gesetze sind translations-invariant: die Transformation  $x_1 \mapsto x_1 + t$ , alle anderen Koordinaten gleichbleibend, ist eine Symmetrie, nämlich der Fluss eines konstanten Vektorfeldes. Nach Nöther ist die dazugehörige Erhaltungsgröße der Impuls, genau genommen die Koordinate des Impulses Richtung  $x_1$ . Für alle Bahnen, die translations-invarianten Gesetzen genügen, gilt, dass dieser Impuls konstant ist.

Die Erklärung im Modell der symplektischen Räume ist: eine Symmetrie ist ein hamiltonianisches Vektorfeld  $F$ . Die entsprechende Differentialform ist ein Gradient, also von der Form  $df$ , und dabei ist  $f$  bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Diese Erklärung ist kein Beweis des Satzes von Nöther, sondern es ist eher umgekehrt: der Nöthersche Satz führte zur Entwicklung der symplektischen Geometrie als mathematisches Modell zur Beschreibung von physikalischen Modellen, die diesen Satz erfüllen.

Zur Beschreibung der zeitliche Entwicklung eines Systems nimmt man zusätzlich zur symplektischen Struktur auch eine sogenannte *Hamilton-Funktion*  $h : X \rightarrow \mathbb{R}$  als gegeben an. Physikalisch entspricht sie der Gesamtenergie, und die wesentlichste Eigenschaft ist, dass sie während der zeitlichen Entwicklung konstant bleibt. Die Hamilton-Funktion ist aber nicht irgendeine Erhaltungsgröße, sondern diejenige Erhaltungsgröße, deren zugehörige Symmetrie die Bewegung der Teilchen beschreibt: die Bahn  $x : \mathbb{R} \rightarrow X$  eines Teilchens ist eine Lösung der Differentialgleichung  $\forall t : \dot{x}(t) = -H(x(t))$ .

Es wird Zeit für ein Beispiel. Wir beschreiben die Bewegung eines Federpendels auf einer geraden (vertikalen) Linie. Der Phasenraum ist zweidimensional, also  $\mathbb{R}^2$ , mit Koordinaten  $p$  – Impuls – und  $q$  – Ort. Leider sind diese beiden Koordinaten nicht gerade unabhängig: wenn man die Ortsbewegung kennt, dann kennt man auch die Geschwindigkeit und daher auch den Impuls. Wir werden aber diese schon bekannte Beziehung nicht verwenden, wir tun praktisch vorläufig so, als ob die Masse variabel wäre. Die beiden Koordinaten können

theoretisch unabhängig voneinander gemessen werden. Den Ort messen wir zum Beispiel durch ein Foto, auf dem sich das Pendel vor einer Skala befindet; und den Impuls kann man messen, indem man ein vergleichsmässig leichtes Teilchen mit dem Federpendel kollidieren lässt und schaut, in welche Richtung es wegfliegt.

Im zweidimensionalen Fall ist eine symplektische Struktur eine Volumensform, die nirgends Null ist. Wir setzen  $\omega := dp \wedge dq$ ; hier liefert die Volumensform den bereits bekannten Flächeninhalt. Ein Vektorfeld  $F : (p, q) \mapsto F_1(p, q), F_2(p, q)$  ist genau dann hamiltonianisch bzw. volumserhaltend, wenn

$$\partial_F(dp \wedge dq) = \left( \frac{\partial F_1(p, q)}{\partial p} + \frac{\partial F_2(p, q)}{\partial q} \right) dp \wedge dq = 0$$

gilt; dieser Ausdruck heißt auch *Divergenz* des Vektorfeldes. Diese Vektorfelder sind Symmetrien in Bezug auf den Flächeninhalt: wenn die Fluss-Abbildung auf eine kompakte, von glatten Kurven begrenzte Teilmenge angewendet, dann erhält man eine kompakte Menge mit gleichem Flächeninhalt.

Es sei  $f : \mathbb{R}^2$  eine skalare Funktion. Das dazugehörige Vektorfeld bekommt man durch Anwendung der schiefssymmetrischen Matrix, die zu  $\Omega$  gehört:

$$F : (p, q) \mapsto \left( \frac{\partial f(p, q)}{\partial q}, -\frac{\partial f(p, q)}{\partial p} \right).$$

Man kann leicht zeigen, dass jedes solche Vektorfeld hamiltonianisch ist, und dass  $\partial_F(f) = 0$  gilt.

Wir wählen nun als Hamilton-Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (p, q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{cq^2}{2};$$

die Konstanten  $m, c$  heißen *Masse* und *Federkonstante*. Das dazugehörige Vektorfeld ist

$$H : (p, q) \mapsto \left( \frac{\partial h(p, q)}{\partial q}, -\frac{\partial h(p, q)}{\partial p} \right) = \left( -cq, -\frac{p}{m} \right).$$

Wenn man das Vektorfeld mit  $-1$  multipliziert, hat man die Bewegungsgleichungen  $p' = -cq, q' = \frac{p}{m}$ . Die zweite Gleichung liefert den bereits bekannten Zusammenhang zwischen Impuls und Geschwindigkeit, den wir vorhin verläufig ignoriert haben. Die erste Gleichung ist equivalent zum Hooke'schen Gesetz. Die Differentialgleichung ist linear und lässt sich leicht lösen. Alle Lösungen außer der konstanten Lösung im Nullpunkt sind periodisch. Der Nullpunkt ist ein Equilibrium, sodass die Eigenwerte der Jacobi-Matrix auf der imaginären Achse liegen.