Übung 10 (11.12.2018)

Beispiel 1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $F : [0,1] : \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit Lipschitz-Konstante L und beschränkt durch M, $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Im *Zweischritt-Verfahren* unterteilen wir $[0,1]$ in N Teilintervalle der Länge $1/N$ und definieren rekursiv

$$z_i = y_i + \frac{F(y_i)}{2N},\ y_{i+1} = y_i + \frac{F(z_i)}{N},\ y_0 = x_0$$

und definieren die Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ stücksweise stetig; auf dem Teilintervall $[i/n,(i+1)/n]$ ist

$$g(t) = y_i + (t - i/N)F(z_i).$$

Man berechne eine Schranke für $||g - P(g)||$, die von L, M, und N abhängt, wobei $P : C^0([0,1],\mathbb{R}^n) \to C^0([0,1],\mathbb{R}^n)$ der Picard-Lindelöf-Operator

$$h \mapsto (t \mapsto x_0 + \int_0^t F(h(s))ds)$$

ist.

Beispiel 2. Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Richtungsfeld $(x,y) \mapsto (-y - x/2, x - y/2)$. Man wende die Koordinatentransformation

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (u,v) = \alpha(x,y) = (x - y^2, y),\ \alpha^{-1}(u,v) = (u + v^2, v)$$

an und berechne das transformierte Vektorfeld. Man vergleiche das Resultat mit der Visualisierung durch das Programm `http://www.falstad.com/vector/`.

Beispiel 3. Es seien $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Vektorfelder

$$F(x_1,x_2) = (x_1/3, x_2/5), \quad G(y_1,y_2) = (y_1,y_2).$$

Es sei $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
a) Man zeige, dass sie Funktion $\tau : X \to X$, $(x_1,x_2) \mapsto (x_1^3, x_2^5)$ das Vektorfeld $F \mid_X$ in das Vektorfeld $G \mid_X$ transformiert.
b) Man zeige, dass F und G nicht transformations-equivalent sind.

Beispiel 4. Es sei $X := (0,\infty)$ und $F : X \to \mathbb{R}$ das Vektorfeld $x \mapsto x^2$. Der Fluss von F ist

$$\varphi(t,x) = \frac{x}{1 - tx}$$

(siehe Übung 8.3). Man transformiere das Vektorfeld F mit der Umkehrfunktion der Funktion $y \mapsto x = \varphi(1,y)$.