Übung 7 (20.11.2018)

Beispiel 1. Man berechne $e^{A_r t}$, $t \in \mathbb{R}$, für $r = 1, 2, 3$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} -12 & -16 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

Im Fall von A_3 wird empfohlen, nicht die Methode der Jordan-Normalform zu verwenden, sondern die Exponentialreihe direkt zu berechnen.

Beispiel 2. Man zeige: die folgende Umkehrung des Rechengesetzes 3 für Exponentialmatrizen: Wenn

$$\forall t : e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$$

gilt, dann gilt $AB = BA$.
Hinweis: man berechne die zweiten Ableitungen der beiden Seiten der Gleichung bei $t = 0$.

Beispiel 3. a) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Es sei $K \subset \mathbb{R}^k$ eine kompakte Teilmenge. Es sei $F : K \to K$ stetig differenzierbar. Man zeige, dass F Lipschitz-stetig ist.
b) Man gebe eine Lipschitz-stetige Funktion an, die nicht überall differenzierbar ist.

Beispiel 4. Man visualisiere mit dem Programm `http://www.falstad.com/vector/` das Verhalten der Lösungen der Gleichung für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\forall x : y'(x) = Ay(x)$, für verschiedene 2×2-Matrizen A (positive/negative/komplexe Eigenwerte, doppelte Eigenwerte, Eigenwerte mit Realteil 0). Unter `user-defined field` in der `Setup`-Leiste kann eine beliebige Funktion eingegeben werden, daher insbesondere auch eine beliebige lineare Funktion. Interessant ist auch die Funktion `streamlines` im `Floor`-Menü, die die Lösungskurven zeichnet.