Übung 2 (16.10.2018)

Beispiel 1. Es sei $T = \mathbb{R}$. Man führe die Differentialgleichung für $f : T \to \mathbb{R}$,

$$\forall t \in \mathbb{R} : f'''(t) = f(t)^2 f'(t) + \sin(t)$$

auf eine vektorwertige autonome Differentialgleichung erster Ordung zurück.

Beispiel 2. Es sei $q \in \mathbb{R}$. Die geometrische Reihe kann rekursiv definiert werden als System von Rekursionen

$$\forall t \in \mathbb{N} : a(t+1) = qa(t),\ \ s(t+1) = s(t) + a(t)$$

mit Startwerten $a(0) = 1$ und $s(0) = 0$. Man schreibe das System als vektorwertige Rekursion in der Form $(a, g)(t+1) = M \cdot (a, g)(t)$ und berechne einen geschlossenen Ausdruck für M^n, $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 3. Man finde alle Lösungen der Form $t \mapsto c_1 t^{c_2}$, wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}, c_2 > 0$, der Differentialgleichung für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\forall t : f'(t) = \sqrt[3]{f(t)}$$

mit Anfangswert $f(0) = 0$. Gibt es darüber hinaus noch weitere Lösungen?

Beispiel 4. Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch $F(x) = -x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ und $F(0) = 0$. (Diese Funktion ist stetig.) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lösung der Differentialgleichung $f'(t) = F(f(t))$. Man bestimme $\lim_{t\to\infty} f(t)$ in Abhängigkeit des Startwertes $f(0)$.