| Matrikelnummer | Name |
|---|---|
| | |

# Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme – Prüfung am 4.3.2020

**Beispiel 1.** Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $(x, y) \mapsto (x, y - x^2)$. Man transformiere das Vektorfeld mit der Transformation

$$(x, y) = (u, v - u^2),\ (u, v) = (x, y + x^2).$$

(Bei richtiger Rechnung ist das transformierte Vektorfeld linear.) Man berechne den Fluss des transformierten und des gegebenen Vektorfelds.

**Lösung.** Es sei $(f_1, f_2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ allg. Lösung vn $f$ und $(g_1, g_2)\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ allg. Lösung des transformierten Vektorfelds. Dann gilt

$$f_1' = f_1, f_2' = f_2 - f_1^2,$$

$$f_1 = g_1, f_2 = g_2 - f_1^2, g_1 = f_1, g_2 = f_2 + f_1^2,$$

$$g_1' = f_1' = f_1 = g_1,$$

$$g_2' = (f_2 + f_1^2)' = f_2' + 2f_1 f_1' = f_2 - f_1^2 + 2f_1 f_1 = f_2 + f_1^2 = g_2.$$

Also ist das transformierte Vektorfeld $G : (u, v) \to (u, v)$.
Der Fluss von $G$ ist $\phi_G : (t, (u, v)) \mapsto (e^t u, e^t v)$.
Der Fluss von $F$ bildet $(u, v - u^2)$ ab in den Punkt $(e^t u, e^t v - (e^t u)^2) = (e^t u, e^t v - e^{2t} u^2)$. Daher ist $\phi_F(t, (x, y)) = (e^t x, e^t(y + x^2) - e^{2t} x^2) = (e^t x, e^t y + e^t x^2 - e^{2t} x^2)$.

**Beispiel 2.** Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
a) $\forall t : f'(t) = f(t)^3 t^4$.
b) $\forall t : f'(t) = t f(t) + t^2$.
c) $\forall t : f'(t) = f(t) + e^t$.

**Lösung.** a) TdV:

$$\int \frac{1}{f^3} df = \int t^4 dt,\ -\frac{2}{f^2} = \frac{t^5}{5} + C,\ f(t) = \frac{-2}{\frac{t^5}{5} + C}.$$

b) VdK. Lösung der homogenen Gleichung $h'(t) = t h(t)$ ist $h(t) = C e^{t^2/2}$.
Ansatz $f(t) = c(t) e^{t^2/2}$ und Einsetzen führt zur Gleichung $c'(t) e^{t^2/2} = t^2$, also $c'(t) = t^2 e^{-t^2/2}$.
Allg. Lösung ist daher $f(t) = (\int t^2 e^{-t^2/2} dt + C) e^{t^2/2}$.
c) Es sei $b$ die Funktion $t \mapsto e^t$. Umformung der DG: $b = f' - f$. Wende auf beide Seiten den Operator $x \mapsto x' - x$ an:

$$0 = (f' - f)' - (f' - f) = f'' - 2f' + f.$$

Diese Gleichung mit konstanten Koeffizienten hat charakteristisches Polynom $T^2 - 2T + 1 = (T - 1)^2$. Die allgemeine Lösung der obigen Gleichung ist daher $f(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t$. Das setzen wir in die Gleichung (c) ein und erhalten die Bedingung

$$C_1 e^t + C_2 e^t + C_2 t e^t = (C_1 + C_2) e^t + C_2 t e^t = C_1 e^t + C_2 t e^t + e^t = (C_1 + 1) e^t + C_2 t e^t,$$

also $C_1 + C_2 = C_1 + 1$, daher $C_2 = 1$, und die allg. Lösung ist $f(t) = C_1 e^t + t e^t$.

**Beispiel 3.** Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld $(x, y) \mapsto (y - x^3 + x^5, -x - y^3)$. Man gebe eine offene Umgebung des Equilibriums $(0, 0)$ an, in der $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)$ eine Ljapunov-Funktion ist. Man zeige, dass $(0, 0)$ ein asymptotisch stabiles Equilibrium ist.

Die vektorielle Ableitung

$$\partial_F(g)(x, y) = 2x(y - x^3 + x^5) + 2y(-x - y^3) = -2x^4 + 2x^6 - 2y^5 = -2x^4(1 - x^2) - 2y^4.$$

Wir definieren $U = \{(x, y) \mid 1 - x^2 > 0\}$. In $U$ ohne $(0, 0)$ ist $\partial_F(g)(x, y) < 0$ und $g(x, y) > 0$, und für $(0, 0)$ sind beide Funktionen Null, daher ist $g$ in $U$ eine Ljapuov-Funktion. Nach Bemerkung (11.2) im Skriptum ist $(0, 0)$ daher asymptotisch stabil.