Ausblick Differentialgeometrie

JOHANNES KEPLER
UNIVERSITY LINZ

Gew. Diff.-Gl. und Dyn. Syst., WS 21/22

January 24, 2022

Mannigfaltigkeiten

Kontinuierliche dynamische Systeme kommen in vielen Modellen in Anwendungen vor.

Mannigfaltigkeiten

Kontinuierliche dynamische Systeme kommen in vielen Modellen in Anwendungen vor. Eine Beschreibung durch Vektorfelder ist oft möglich. Allerdings sind diese Vektorfelder nicht immer auf offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ definiert, sondern auf allgemeineren Gebilden, die "n-dimensionale Mannigfaltigkeiten" genannt werden.

Mannigfaltigkeiten

Kontinuierliche dynamische Systeme kommen in vielen Modellen in Anwendungen vor. Eine Beschreibung durch Vektorfelder ist oft möglich. Allerdings sind diese Vektorfelder nicht immer auf offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ definiert, sondern auf allgemeineren Gebilden, die "*n*-dimensionale Mannigfaltigkeiten" genannt werden.

Beispiel: Wenn der Zustand zu einer gewissen Zeit durch einen Winkel beschrieben wird, dann haben wir die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$.

Mannigfaltigkeiten

Kontinuierliche dynamische Systeme kommen in vielen Modellen in Anwendungen vor. Eine Beschreibung durch Vektorfelder ist oft möglich. Allerdings sind diese Vektorfelder nicht immer auf offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ definiert, sondern auf allgemeineren Gebilden, die "n-dimensionale Mannigfaltigkeiten" genannt werden.

Beispiel: Wenn der Zustand zu einer gewissen Zeit durch einen Winkel beschrieben wird, dann haben wir die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$. keine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^1$!

Mannigfaltigkeiten

Kontinuierliche dynamische Systeme kommen in vielen Modellen in Anwendungen vor. Eine Beschreibung durch Vektorfelder ist oft möglich. Allerdings sind diese Vektorfelder nicht immer auf offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ definiert, sondern auf allgemeineren Gebilden, die "n-dimensionale Mannigfaltigkeiten" genannt werden.

Beispiel: Wenn der Zustand zu einer gewissen Zeit durch einen Winkel beschrieben wird, dann haben wir die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$. keine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^1$! Die Mannigfaltigkeit S^1 ist kompakt und randlos (sowas gibts in $\mathbb{R}^n$ nicht).

Mannigfaltigkeiten

Kontinuierliche dynamische Systeme kommen in vielen Modellen in Anwendungen vor. Eine Beschreibung durch Vektorfelder ist oft möglich. Allerdings sind diese Vektorfelder nicht immer auf offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ definiert, sondern auf allgemeineren Gebilden, die "n-dimensionale Mannigfaltigkeiten" genannt werden.

Beispiel: Wenn der Zustand zu einer gewissen Zeit durch einen Winkel beschrieben wird, dann haben wir die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$. keine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^1$! Die Mannigfaltigkeit S^1 ist kompakt und randlos (sowas gibts in $\mathbb{R}^n$ nicht).
Satz: *Lösungen mit Anfangswert in einer kompakten Menge sind entweder für ganz $\mathbb{R}_+$ definiert oder erreichen in endlicher Zeit den Rand.*

Mannigfaltigkeiten

Kontinuierliche dynamische Systeme kommen in vielen Modellen in Anwendungen vor. Eine Beschreibung durch Vektorfelder ist oft möglich. Allerdings sind diese Vektorfelder nicht immer auf offenen Mengen in $\mathbb{R}^n$ definiert, sondern auf allgemeineren Gebilden, die "*n*-dimensionale Mannigfaltigkeiten" genannt werden.

Beispiel: Wenn der Zustand zu einer gewissen Zeit durch einen Winkel beschrieben wird, dann haben wir die 1-dimensionale Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$. keine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^1$!
Die Mannigfaltigkeit S^1 ist kompakt und randlos (sowas gibts in $\mathbb{R}^n$ nicht).
Satz: *Lösungen mit Anfangswert in einer kompakten Menge sind entweder für ganz $\mathbb{R}_+$ definiert oder erreichen in endlicher Zeit den Rand.*
In S^1 bedeutet ist: Lösungen sind immer definiert!

Schwierigkeiten bei der Definition

Definition: *Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum* X*, für den gilt: für jeden Punkt gibt es eine Umgebung, die homöomrph zu einer offenen Menge in* $\mathbb{R}^n$ *ist.*

Schwierigkeiten bei der Definition

Definition: *Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum* X*, für den gilt: für jeden Punkt gibt es eine Umgebung, die homöomrph zu einer offenen Menge in* $\mathbb{R}^n$ *ist. Ausserdem müssen noch zwei weitere topologische Bedingungen erfüllt sein, die uns heute nicht interessieren.*

Schwierigkeiten bei der Definition

Definition: *Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum X, für den gilt: für jeden Punkt gibt es eine Umgebung, die homöomrph zu einer offenen Menge in $\mathbb{R}^n$ ist. Ausserdem müssen noch zwei weitere topologische Bedingungen erfüllt sein, die uns heute nicht interessieren.*

Die Homöomorphismen $\phi_i : X_i \to U_i$, wobei X_i offen in X und U_i offen in $\mathbb{R}^n$ ist, heißen *Karten*. Eine Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der durch Karten überdeckt werden kann.

Schwierigkeiten bei der Definition

Definition: *Eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum X, für den gilt: für jeden Punkt gibt es eine Umgebung, die homöomrph zu einer offenen Menge in $\mathbb{R}^n$ ist. Ausserdem müssen noch zwei weitere topologische Bedingungen erfüllt sein, die uns heute nicht interessieren.*

Die Homöomorphismen $\phi_i : X_i \to U_i$, wobei X_i offen in X und U_i offen in $\mathbb{R}^n$ ist, heißen *Karten*. Eine Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum, der durch Karten überdeckt werden kann.

Die Schwierigkeit ist, zu sagen, wann eine Funktion $f : \mathbb{R} \to X$ differenzierbar ist. Man kann zwar sagen, ob $\phi_i \circ f : \mathbb{R} \to U_i$ differenzierbar ist, aber dann hängt die Differenzierbarkeit von der Wahl der Karten ab.

Ausweg

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine *Differenzierbarkeitsstruktur* auf X ist gegeben durch einen *Atlas* – also eine Menge von Karten $(\phi_i : X_i \to U_i)_i$, die X überdecken –, sodass die *Kartenwechselabbildungen* $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : U_i \dashrightarrow U_j$ differenzierbar sind.

Ausweg

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine *Differenzierbarkeitsstruktur* auf X ist gegeben durch einen *Atlas* – also eine Menge von Karten $(\phi_i : X_i \to U_i)_i$, die X überdecken –, sodass die *Kartenwechselabbildungen* $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : U_i \dashrightarrow U_j$ differenzierbar sind.

(Der Definitionsbereich der Kartenwechselabbildung ϕ_{ij} ist natürlich $\phi_i^{-1}(X_i \cap X_j)$.)

Ausweg

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine *Differenzierbarkeitsstruktur* auf X ist gegeben durch einen *Atlas* – also eine Menge von Karten $(\phi_i : X_i \to U_i)_i$, die X überdecken –, sodass die *Kartenwechselabbildungen* $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : U_i \dashrightarrow U_j$ differenzierbar sind.

(Der Definitionsbereich der Kartenwechselabbildung ϕ_{ij} ist natürlich $\phi_i^{-1}(X_i \cap X_j)$.)

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit mit einer Differenzierbarkeitsstruktur.

Ausweg

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine *Differenzierbarkeitsstruktur* auf X ist gegeben durch einen *Atlas* – also eine Menge von Karten $(\phi_i : X_i \to U_i)_i$, die X überdecken –, sodass die *Kartenwechselabbildungen* $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : U_i \dashrightarrow U_j$ differenzierbar sind.

(Der Definitionsbereich der Kartenwechselabbildung ϕ_{ij} ist natürlich $\phi_i^{-1}(X_i \cap X_j)$.)

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit mit einer Differenzierbarkeitsstruktur.

Nun ist es kein Problem mehr, zu definieren, ob eine Abbildung zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten differenzerbar ist: genau dann wenn die Verknüpfung mit den Karten differenzierbar ist. Und das ist eine Abbildung von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$.

Atlas für S^1

Es sei $X := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Atlas für S^1

Es sei $X := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
Wir setzen $X_1 = X \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ und $X_2 = X \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$.

Atlas für S^1

Es sei $X := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
Wir setzen $X_1 = X \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ und $X_2 = X \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$.
Wir setzen $U_1 = (0, 2\pi)$ und $U_2 = (\pi, 3\pi)$. Beachten Sie, dass U_i ein Repräsentantensystem für die Equivalenzklassen in X_i ist.

Atlas für S^1

Es sei $X := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
Wir setzen $X_1 = X \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ und $X_2 = X \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$.
Wir setzen $U_1 = (0, 2\pi)$ und $U_2 = (\pi, 3\pi)$. Beachten Sie, dass U_i ein Repräsentantensystem für die Equivalenzklassen in X_i ist.
Wir setzen ϕ_1 und ϕ_2 als Auswahl der Repräsentanten.

Atlas für S^1

Es sei $X := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.
Wir setzen $X_1 = X \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ und $X_2 = X \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$.
Wir setzen $U_1 = (0, 2\pi)$ und $U_2 = (\pi, 3\pi)$. Beachten Sie, dass U_i ein Repräsentantensystem für die Equivalenzklassen in X_i ist.
Wir setzen ϕ_1 und ϕ_2 als Auswahl der Repräsentanten.
Die Kartenwechselabbildung ψ_{12} ist definiert auf $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$, und es gilt

$$\psi_{12}(x) = \begin{cases} x + 2\pi, & \text{if } x < \pi \\ x, & \text{if } x > \pi \end{cases}$$

It is clear that ψ_{12} is differentiable.

Exotische Strukturen

Proposition: *Es seien* $(\phi_i : X_i \to U_i)_i$ *und* $(\psi_j : X_j \to V_j)_j$ *zwei Differenzierbarkeitsstrukturen auf* $X = S^1$. *Dann existiert ein* Diffeomorphismus $\alpha : (X, \phi) \to (X, \psi)$, *d.h. eine differenzierbare Bijektion, deren Umkehrung wieder differenzierbar ist.*

Exotische Strukturen

Proposition: *Es seien* $(\phi_i : X_i \to U_i)_i$ *und* $(\psi_j : X_j \to V_j)_j$ *zwei Differenzierbarkeitsstrukturen auf* $X = S^1$. *Dann existiert ein* Diffeomorphismus $\alpha : (X, \phi) \to (X, \psi)$, *d.h. eine differenzierbare Bijektion, deren Umkehrung wieder differenzierbar ist.*

Ein Homöomorphismus $\alpha : X \to X$ ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn die Abbildungen $\psi_j \circ \alpha \circ \phi_i$ alle differenzierbar mit Jacobi-Determinante ungleich Null sind.

Exotische Strukturen

Proposition: *Es seien* $(\phi_i : X_i \to U_i)_i$ *und* $(\psi_j : X_j \to V_j)_j$ *zwei Differenzierbarkeitsstrukturen auf* $X = S^1$*. Dann existiert ein* Diffeomorphismus $\alpha : (X, \phi) \to (X, \psi)$*, d.h. eine differenzierbare Bijektion, deren Umkehrung wieder differenzierbar ist.*

Ein Homöomorphismus $\alpha : X \to X$ ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn die Abbildungen $\psi_j \circ \alpha \circ \phi_i$ alle differenzierbar mit Jacobi-Determinante ungleich Null sind.

Die Proposition besagt, dass die Differenzierbarkeitsstruktur von S^1 im wesentlichen (d.h. bis auf Diffeomorphimus) eindeutig ist.

Exotische Strukturen

Proposition: *Es seien* $(\phi_i : X_i \to U_i)_i$ *und* $(\psi_j : X_j \to V_j)_j$ *zwei Differenzierbarkeitsstrukturen auf* $X = S^1$*. Dann existiert ein* Diffeomorphismus $\alpha : (X, \phi) \to (X, \psi)$*, d.h. eine differenzierbare Bijektion, deren Umkehrung wieder differenzierbar ist.*

Ein Homöomorphismus $\alpha : X \to X$ ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn die Abbildungen $\psi_j \circ \alpha \circ \phi_i$ alle differenzierbar mit Jacobi-Determinante ungleich Null sind.

Die Proposition besagt, dass die Differenzierbarkeitsstruktur von S^1 im wesentlichen (d.h. bis auf Diffeomorphimus) eindeutig ist. Milnor überraschte die Fachwelt 1956 mit dem Satz, dass obige Proposition für S^7 nicht stimmt: dort gibt es mindestens 7 wesentlich verschiedene (nicht diffeomorphe) Differenzierbarkeitsstrukturen.

Exotische Strukturen

Proposition: *Es seien* $(\phi_i : X_i \to U_i)_i$ *und* $(\psi_j : X_j \to V_j)_j$ *zwei Differenzierbarkeitsstrukturen auf* $X = S^1$*. Dann existiert ein* Diffeomorphismus $\alpha : (X, \phi) \to (X, \psi)$, *d.h. eine differenzierbare Bijektion, deren Umkehrung wieder differenzierbar ist.*

Ein Homöomorphismus $\alpha : X \to X$ ist genau dann ein Diffeomorphismus, wenn die Abbildungen $\psi_j \circ \alpha \circ \phi_i$ alle differenzierbar mit Jacobi-Determinante ungleich Null sind.

Die Proposition besagt, dass die Differenzierbarkeitsstruktur von S^1 im wesentlichen (d.h. bis auf Diffeomorphimus) eindeutig ist. Milnor überraschte die Fachwelt 1956 mit dem Satz, dass obige Proposition für S^7 nicht stimmt: dort gibt es mindestens 7 wesentlich verschiedene (nicht diffeomorphe) Differenzierbarkeitsstrukturen.
Heute weiß man, daß die Differenzierbarkeitsstruktur auf $\mathbb{R}^n$ eindeutig ist für $n \neq 4$. Für den $\mathbb{R}^4$ gibt es allerdings unendlich viele exotische Differenzierbarkeitsstrukturen.

Mehr Schwierigkeiten

Wie definieren wir Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X?

Mehr Schwierigkeiten

Wie definieren wir Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X?

Versuch 1: Eine differenzerbare Abbildung $X \to \mathbb{R}^n$.

Mehr Schwierigkeiten

Wie definieren wir Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X?

Versuch 1: Eine differenzerbare Abbildung $X \to \mathbb{R}^n$.

Für $X = S^1$ ist das okay. Aber für $X = S^2$ geht das schief, denn es widerspricht dem folgenden Satz:

Mehr Schwierigkeiten

Wie definieren wir Vektorfelder auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit X?

Versuch 1: Eine differenzerbare Abbildung $X \to \mathbb{R}^n$.

Für $X = S^1$ ist das okay. Aber für $X = S^2$ geht das schief, denn es widerspricht dem folgenden Satz:

Satz: *Jedes Vektorfeld auf S^2 hat zumindest eine Nullstelle.*

Vektorbündel

Es sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das *triviale Vektorbündel* über X von Rang m ist $X \times \mathbb{R}^m$ mit der Abbildung $\pi : (x, v) \mapsto x$. Ein *Vektorbündel* besteht aus einem Raum E und einer Abbildung $\pi : E \to X$, deren Urbilder $\pi^{-1}(x)$ m-dimensionale Vektorräume sind.

Vektorbündel

Es sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das *triviale Vektorbündel* über X von Rang m ist $X \times \mathbb{R}^m$ mit der Abbildung $\pi : (x, v) \mapsto x$. Ein *Vektorbündel* besteht aus einem Raum E und einer Abbildung $\pi : E \to X$, deren Urbilder $\pi^{-1}(x)$ m-dimensionale Vektorräume sind. Ausserdem muss eine offene Überdeckung $(X_i)_i$ existieren, sodass die Einschränkungen $E_i := \pi^{-1}(X_i)$ "im wesentlichen" trivial sind.

Vektorbündel

Es sei X eine n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Das *triviale Vektorbündel* über X von Rang m ist $X \times \mathbb{R}^m$ mit der Abbildung $\pi : (x, v) \mapsto x$. Ein *Vektorbündel* besteht aus einem Raum E und einer Abbildung $\pi : E \to X$, deren Urbilder $\pi^{-1}(x)$ m-dimensionale Vektorräume sind. Ausserdem muss eine offene Überdeckung $(X_i)_i$ existieren, sodass die Einschränkungen $E_i := \pi^{-1}(X_i)$ "im wesentlichen" trivial sind.

Zwei Vektorbündel $\pi_1 : E_1 \to X$ und $\pi_2 : E_2 \to X$ heißen isomorph, wenn es einen Diffeomorphismus $\alpha : E_1 \to E_2$ gibt, sodass $\pi_2 = \pi_1 \circ \alpha$ gilt, und sodass für jedes $x \in X$ die Urbild-Abbildung $\pi_1^{-1}(x) \to \pi_2^{-1}(x)$ ein Isomorphismus von Vektorräumen ist. "Im wesentlichen trivial" heißt "isomorph zum trivialen Vektorbündel".

Schnitte

Es sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel. Eine differenzierbare Abbildung $s : X \to E$, sodass $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$ ist, heißt *Schnitt* des Vektorbündels. Für jedes $x \in X$ ist $s(x)$ ein Vektor im m-dimensionalen Vektorraum.

Schnitte

Es sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel. Eine differenzierbare Abbildung $s : X \to E$, sodass $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$ ist, heißt *Schnitt* des Vektorbündels. Für jedes $x \in X$ ist $s(x)$ ein Vektor im m-dimensionalen Vektorraum.

Beispiel 1: Wenn $E = X \times \mathbb{R}^m$ das triviale Vektorbündel ist, dann ist ein Schnitt nichts anderes als eine differenzierbare Abbildung von X nach $\mathbb{R}^m$.

Schnitte

Es sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel. Eine differenzierbare Abbildung $s : X \to E$, sodass $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$ ist, heißt *Schnitt* des Vektorbündels. Für jedes $x \in X$ ist $s(x)$ ein Vektor im m-dimensionalen Vektorraum.

Beispiel 1: Wenn $E = X \times \mathbb{R}^m$ das triviale Vektorbündel ist, dann ist ein Schnitt nichts anderes als eine differenzierbare Abbildung von X nach $\mathbb{R}^m$.

Wir werden gleich Vektorfelder definieren als Schnitte eines speziellen Vektorbündels von Rang n, nämlich des *Tangentialbündels*.

Schnitte

Es sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel. Eine differenzierbare Abbildung $s : X \to E$, sodass $\pi \circ s = \mathrm{id}_X$ ist, heißt *Schnitt* des Vektorbündels. Für jedes $x \in X$ ist $s(x)$ ein Vektor im m-dimensionalen Vektorraum.

Beispiel 1: Wenn $E = X \times \mathbb{R}^m$ das triviale Vektorbündel ist, dann ist ein Schnitt nichts anderes als eine differenzierbare Abbildung von X nach $\mathbb{R}^m$.

Wir werden gleich Vektorfelder definieren als Schnitte eines speziellen Vektorbündels von Rang n, nämlich des *Tangentialbündels*.

Beispiel 2: Ich kann jedem $x \in X$ den Nullvektor in $\pi^{-1}(x)$ zuordnen. Dieser spezielle Schnitt heisst auch *Nullschnitt*.

Verkleben von trivialen Vektorfeldern

Es sei $(X_i)_i$ eine offene überdeckung von X. Bezeichnung: $X_{ij} := X_i \cap X_j$, $X_{ijk} := X_i \cap X_j \cap X_k$.

Verkleben von trivialen Vektorfeldern

Es sei $(X_i)_i$ eine offene überdeckung von X. Bezeichnung: $X_{ij} := X_i \cap X_j$, $X_{ijk} := X_i \cap X_j \cap X_k$.

Es sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel, dessen Einschränkungen auf X_i isomorph zu trivialen Vektorbündeln ist. Wir bezeichnen die lokalen Isomorphismen als $\tau_i : (X_i \times \mathbb{R}^m) \to \pi^{-1}(X_i)$.

Verkleben von trivialen Vektorfeldern

Es sei $(X_i)_i$ eine offene überdeckung von X. Bezeichnung: $X_{ij} := X_i \cap X_j$, $X_{ijk} := X_i \cap X_j \cap X_k$.

Es sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel, dessen Einschränkungen auf X_i isomorph zu trivialen Vektorbündeln ist. Wir bezeichnen die lokalen Isomorphismen als $\tau_i : (X_i \times \mathbb{R}^m) \to \pi^{-1}(X_i)$.
Die Abbildungen $\tau_{ij} = \tau_i^{-1} \circ \tau_j : (X_{ij} \times \mathbb{R}^m) \to (X_{ij} \times \mathbb{R}^m)$ sind für fixes x lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$ (also Matrizen). Man bezeichnet sie als *Transitionsabbildungen*.

Verkleben von trivialen Vektorfeldern

Es sei $(X_i)_i$ eine offene überdeckung von X. Bezeichnung: $X_{ij} := X_i \cap X_j$, $X_{ijk} := X_i \cap X_j \cap X_k$.

Es sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel, dessen Einschränkungen auf X_i isomorph zu trivialen Vektorbündeln ist. Wir bezeichnen die lokalen Isomorphismen als $\tau_i : (X_i \times \mathbb{R}^m) \to \pi^{-1}(X_i)$.
Die Abbildungen $\tau_{ij} = \tau_i^{-1} \circ \tau_j : (X_{ij} \times \mathbb{R}^m) \to (X_{ij} \times \mathbb{R}^m)$ sind für fixes x lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$ (also Matrizen). Man bezeichnet sie als *Transitionsabbildungen*.

Lemma 1: *Wenn zwei Vektorbündel die gleichen Transitionsabbildungen haben, dann sind sie isomorph.*

Verkleben von trivialen Vektorfeldern

Es sei $(X_i)_i$ eine offene überdeckung von X. Bezeichnung: $X_{ij} := X_i \cap X_j$, $X_{ijk} := X_i \cap X_j \cap X_k$.

Es sei $\pi : E \to X$ ein Vektorbündel, dessen Einschränkungen auf X_i isomorph zu trivialen Vektorbündeln ist. Wir bezeichnen die lokalen Isomorphismen als $\tau_i : (X_i \times \mathbb{R}^m) \to \pi^{-1}(X_i)$.
Die Abbildungen $\tau_{ij} = \tau_i^{-1} \circ \tau_j : (X_{ij} \times \mathbb{R}^m) \to (X_{ij} \times \mathbb{R}^m)$ sind für fixes x lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^m$ (also Matrizen). Man bezeichnet sie als *Transitionsabbildungen*.

Lemma 1: *Wenn zwei Vektorbündel die gleichen Transitionsabbildungen haben, dann sind sie isomorph.*

Lemma 2: *Eine Kollektion von Abbildungen $\tau_{ij} : (X_{ij} \times \mathbb{R}^m) \to (X_{ij} \times \mathbb{R}^m)$, die für fixe x linear sind, bildet genau die Translationsabbildungen eines Vektorraums, wenn für alle i, j, k und für alle $x \in X_{ijk}$ die Kozykel-Identität $\tau_{ij} \circ \tau_{jk} = \tau_{ik}$ erfüllt ist.*

Ein Vektorbündel, bei dem jeder Schnitt eine Nullstelle hat

Wir setzen $X = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $X_1 = X \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ und $X_2 = X \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$.
Dann hat X_{12}, zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich
$C_1 := (0, \pi)$ (modulo 2π) und $C_2 := (\pi, 2\pi)$ (modulo 2π).

Ein Vektorbündel, bei dem jeder Schnitt eine Nullstelle hat

Wir setzen $X = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $X_1 = X \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ und $X_2 = X \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$. Dann hat X_{12}, zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich $C_1 := (0, \pi)$ (modulo 2π) und $C_2 := (\pi, 2\pi)$ (modulo 2π).

Wir setzen $m = 1$. Es gibt nur eine Translationsabbildung $\tau_{12} : (X_{12} \times \mathbb{R}) \to (X_{12} \times \mathbb{R})$. Wir setzen $\tau_{12}(x, v) = (x, v)$ für $x \in C_1$ und $\tau_{12}(x, v) = (x, -v)$ für $x \in C_2$.

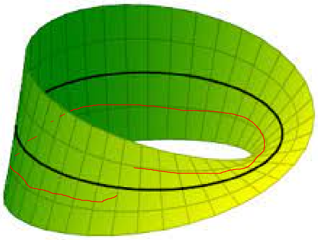
Ein Vektorbündel, bei dem jeder Schnitt eine Nullstelle hat

Wir setzen $X = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $X_1 = X \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ und $X_2 = X \setminus (\pi + 2\pi\mathbb{Z})$. Dann hat X_{12}, zwei Zusammenhangskomponenten, nämlich $C_1 := (0, \pi)$ (modulo 2π) und $C_2 := (\pi, 2\pi)$ (modulo 2π).

Wir setzen $m = 1$. Es gibt nur eine Translationsabbildung $\tau_{12} : (X_{12} \times \mathbb{R}) \to (X_{12} \times \mathbb{R})$. Wir setzen $\tau_{12}(x, v) = (x, v)$ für $x \in C_1$ und $\tau_{12}(x, v) = (x, -v)$ für $x \in C_2$.

Ein Schnitt ist gegeben durch zwei Funktionen $s_1 : X_1 \to \mathbb{R}^1$, $s_2 : X_2 :\to \mathbb{R}^1$, sodass $s_1(x) = \tau_{12}(x, s_2(x))$ gilt für alle $x \in X_{12}$. Wäre s ein Schnitt ohne Nullstelle, dann hätten sowohl s_1 als auch s_2 überall dasselbe Vorzeichen. Wenn $s_1(x) > 0$ ist für alle $x \in X_1$, dann folgt $s_2(x) > 0$ für $x \in C_1$ und $s_2(x) < 0$ für $x \in C_2$ - aber dann wechselt s_2 das Vorzeichen, Widerspruch.

Ein Bild dieses Vektorbündels



Jeder Schnitt, dargestellt durch die rote Linie, muss irgendwo den Nullschnitt – dargestellt durch die schwarze Linie – kreuzen.

Das Tangentialbündel

Es sei X eine differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(\phi_i : X_i \to U_i)_i$; es seien $\phi_{ij} : U_i \dashrightarrow U_j$ die Kartenwechselabbildung.
Wir definieren ein Vektorbündel von Rang n, trivial auf allen X_i, durch die Transitionsfunktionen

$$\tau_{ij}(x, v) := \phi'_{ji}(\phi_j(x)) \cdot v$$

(die Jacobi-Matrix der Kartenwechselabbildung bei $\phi_j(x)$ wird angewandt auf v).

Das Tangentialbündel

Es sei X eine differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(\phi_i : X_i \to U_i)_i$; es seien $\phi_{ij} : U_i \dashrightarrow U_j$ die Kartenwechselabbildung.
Wir definieren ein Vektorbündel von Rang n, trivial auf allen X_i, durch die Transitionsfunktionen

$$\tau_{ij}(x, v) := \phi'_{ji}(\phi_j(x)) \cdot v$$

(die Jacobi-Matrix der Kartenwechselabbildung bei $\phi_j(x)$ wird angewandt auf v).

Mit der Kettenregel und mit der Identität $\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$ kann man zeigen, dass die Kozykel-Identität erfüllt ist.

Das Tangentialbündel

Es sei X eine differenzierbare n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(\phi_i : X_i \to U_i)_i$; es seien $\phi_{ij} : U_i \dashrightarrow U_j$ die Kartenwechselabbildung.
Wir definieren ein Vektorbündel von Rang n, trivial auf allen X_i, durch die Transitionsfunktionen

$$\tau_{ij}(x, v) := \phi'_{ji}(\phi_j(x)) \cdot v$$

(die Jacobi-Matrix der Kartenwechselabbildung bei $\phi_j(x)$ wird angewandt auf v).

Mit der Kettenregel und mit der Identität $\phi_{jk} \circ \phi_{ij} = \phi_{ik}$ kann man zeigen, dass die Kozykel-Identität erfüllt ist.

Es gibt andere Definition des Tangentialbündels (ohne Verkleben), aber keine ist ganz einfach.

Das Kotangentialbündel

Nimmt man als Tranlationsfunktionen die Transponierten der inversen Matrizen (nämlich $\phi'_{ij}(\phi_i(x))^t$), dann ist die Kozykel-Identität ebenfalls erfüllt und man erhält ein zweiter Vektorbündel von Rang n. Es heisst *Kotangentialbündel*.

Das Kotangentialbündel

Nimmt man als Tranlationsfunktionen die Transponierten der inversen Matrizen (nämlich $\phi'_{ij}(\phi_i(x))^t$), dann ist die Kozykel-Identität ebenfalls erfüllt und man erhält ein zweiter Vektorbündel von Rang n. Es heisst *Kotangentialbündel*.
Die Schnitte des Kotangentialbündels heißen "Differentialformen".
In Karten werden sie oft mit als Linearkombination von $dx_1, \ldots, dx_n$ geschrieben. Sie treten auch in Kurvenintegralen auf.

Das Kotangentialbündel

Nimmt man als Tranlationsfunktionen die Transponierten der inversen Matrizen (nämlich $\phi'_{ij}(\phi_i(x))^t$), dann ist die Kozykel-Identität ebenfalls erfüllt und man erhält ein zweiter Vektorbündel von Rang n. Es heisst *Kotangentialbündel*.
Die Schnitte des Kotangentialbündels heißen "Differentialformen". In Karten werden sie oft mit als Linearkombination von $dx_1, \ldots, dx_n$ geschrieben. Sie treten auch in Kurvenintegralen auf.

Man kennt eine Fülle von algebraischen Operationen auf Vektorfeldern und Differentialformen: die Lieklammer von zwei Vektorfeldern, das Hackprodukt zweier Differentialformen, die äußere Ableitung einer Differentialform, die vektorielle Ableitung einer Differentialform, die Spur eines Vektorfelds und einer Differentialform ...
Um diese Operationen zu verstehen, ist es wichtig, die Tangentialvektoren und Kotangentialvektoren auseinanderzuhalten (nicht immer leicht).

Das Gradientenfeld

Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Das "Vektorfeld" $x \mapsto \mathrm{grad}(f)(x)$ wird oft Gradientenfeld genannt. In Wahrheit handelt es sich aber um eine Differentialform:

Das Gradientenfeld

Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Das "Vektorfeld" $x \mapsto \mathrm{grad}(f)(x)$ wird oft Gradientenfeld genannt. In Wahrheit handelt es sich aber um eine Differentialform:

Wir führen einen Koordinatenwechsel durch. Wenn man das Gradientenfeld wie ein Vektorfeld transformiert, dann ist es plötzlich kein Gradientenfeld mehr. Wenn man es aber wie eine Differentialform transformiert, bekommt man wieder den Gradienten der gleichen Funktion in den neuen Koordinaten.

Das Gradientenfeld

Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Das "Vektorfeld" $x \mapsto \mathrm{grad}(f)(x)$ wird oft Gradientenfeld genannt. In Wahrheit handelt es sich aber um eine Differentialform:

Wir führen einen Koordinatenwechsel durch. Wenn man das Gradientenfeld wie ein Vektorfeld transformiert, dann ist es plötzlich kein Gradientenfeld mehr. Wenn man es aber wie eine Differentialform transformiert, bekommt man wieder den Gradienten der gleichen Funktion in den neuen Koordinaten.

Auf manchen Mannigfaltigkeiten kann man Vektorfelder und Differentialformen identifizieren. Dazu reicht aber eine Differenzierbarkeitsstruktur nicht aus, man braucht entweder eine symplektische Struktur oder eine Riemann-Metrik.