

Diese Notizen sind Teil der Vorlesung "Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme" an der JKU Linz, WS 2020/21. Sie behandeln die Hamiltonsche Mechanik.

1 Vorübung: Volums-erhaltende Vektorfelder in der Ebene

Wie lassen sich Bewegungen von Körpern erklären bzw. mathematisch beschreiben? In den drei Newtonschen Axiomen

- ein Körper, auf den keine äußeren Kräfte einwirken, verharrt in Ruhe oder in gleichförmiger Bewegung;
- Kraft ist Masse mal Beschleunigung;
- zu jeder Kraft gibt es eine Gegenkraft

wird festgestellt, daß es keinen Sinn hat, eine Erklärung für die Geschwindigkeit (1.Ableitung) von Körpern zu suchen. Dagegen unterliegt die Beschleunigung (2.Ableitung) Gesetzen, die einer mathematischen Beschreibung zugänglich sind.

Beispiel 1.1. Angenommen, ein Teilchen mit Masse 1 bewegt sich in der Ebene unter der Einwirkung einer Kraft, deren Grösse 1 durch das Quadrat des Abstands zum Nullpunkt ist und die in Richtung des Nullpunkts zeigt. In Polarkoordinaten (r, ϕ) gilt für die zeitabhängige Position $P : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\})$ und die ersten beiden Ableitungen

$$P = r \begin{pmatrix} \cos \circ \phi \\ \sin \circ \phi \end{pmatrix}, P' = r' \begin{pmatrix} \cos \circ \phi \\ \sin \circ \phi \end{pmatrix} + r\phi' \begin{pmatrix} -\sin \circ \phi \\ \cos \circ \phi \end{pmatrix},$$

$$P'' = r'' \begin{pmatrix} \cos \circ \phi \\ \sin \circ \phi \end{pmatrix} + 2r'\phi' \begin{pmatrix} -\sin \circ \phi \\ \cos \circ \phi \end{pmatrix} + r\phi'' \begin{pmatrix} -\sin \circ \phi \\ \cos \circ \phi \end{pmatrix} - r\phi'^2 \begin{pmatrix} \cos \circ \phi \\ \sin \circ \phi \end{pmatrix}.$$

Nach dem zweiten Newtonschen Axiom ist $P'' = -\frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \cos \circ \phi \\ \sin \circ \phi \end{pmatrix}$. Die beiden Vektoren $\begin{pmatrix} \cos \circ \phi \\ \sin \circ \phi \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -\sin \circ \phi \\ \cos \circ \phi \end{pmatrix}$ sind zu jeder Zeit linear unabhängig, daher gilt

$$r'' - r\phi'^2 + \frac{1}{r^2} = 0, \quad 2r'\phi' + r\phi'' = 0.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $(r^2\phi')' = 2rr'\phi' + r^2\phi'' = 0$, also $r^2\phi' = c_1$ für eine Konstante $c_1 \in \mathbb{R}$: das zweite Kepler-sche Gesetz. Wir verwenden das, um aus der ersten Gleichung ϕ' zu eliminieren:

$$0 = r'' - r \left(\frac{c_1}{r^2} \right)^2 + \frac{1}{r^2} = r'' - \frac{c_1^2}{r^3} + \frac{1}{r^2}.$$

Anstatt diese Differentialgleichung für r zu lösen, wollen wir "nur" das erste Keplersche Gesetz beweisen: die Bahnen sind Kegelschnitte mit Brennpunkt im Nullpunkt. Die Gleichung in Polarkoordinaten (ρ, ψ) für die Kegelschnitte ist

$$\rho(\psi) = \frac{1}{A + B \cos(\psi)},$$

und der Nenner erfüllt eine einfache Differentialgleichung. Wir nehmen an, daß $c_1 \neq 0$ ist. Dann ist ϕ lokal invertierbar. Es sei $f := \frac{1}{r} \circ \phi^{-1}$, d.h. $r(t) = \frac{1}{f(\phi(t))}$. Wegen $r^2\phi' = c_1$ gilt $\phi'(t) = c_1 f(\phi(t))^2$, und es folgt

$$r'(t) = -\frac{f'(\phi(t))\phi'(t)}{(f(\phi(t)))^2} = -c_1 f'(\phi(t)), \quad r''(t) = -c_1 f''(\phi(t))\phi'(t) = -c_1^2 f''(\phi(t))f(\phi(t))^2.$$

Nach dem Einsetzen der Ausdrücke für $r(t), r'(t), r''(t)$ kommt t nur mehr als Argument von ϕ vor. Es ergibt sich folgende Differentialgleichung für f :

$$0 = -c_1^2 f'' f^2 - c_1^2 f^3 + f^2 = f^2(-c_1^2 f'' - c_1 f + 1).$$

Der Wert von f kann nie 0 sein, also ist $f'' + f - \frac{1}{c_1} = 0$. Diese Gleichung können alle hier leicht lösen, die allgemeine Lösung ist

$$f(p) = c_2 \cos(p) + c_3 \sin(p) + \frac{1}{c_1};$$

damit ist das erste Keplersche Gesetz hergeleitet.

Die Newton-Mechanik ist nicht gut geeignet zur Beschreibung von eingeschränkten Bewegungen, bei denen sich die Körper nur auf bestimmten Teilmengen bewegen können (Pendel etc).

In der Hamilton-Mechanik ist der Phasenraum eines oder mehrerer Teilchen immer von geradzahlig Dimension: zu jeder Ortskoordinate gibt es eine Geschwindigkeitskoordinate. Die Bewegung wird dann beschrieben durch ein Vektorfeld auf dem Phasenraum, d.h. eine Differentialgleichung erster Ordnung. (Allgemein haben wir gesehen, dass Systeme von beliebiger Ordnung auf Systeme erster Ordnung zurückgeführt werden können mit Hilfe der Verwendung zusätzlicher Variablen.)

Das neue Element in der Hamilton-Mechanik (in Relation zu den Newton-schen Axiomen) ist die fundamentale Bedeutung von Erhaltungsgrößen. Darunter versteht man Funktionen vom Phasenraum in die reellen Zahlen, die entlang jeder Bahn konstant sind, oder equivalent dazu: deren vektorielle Ableitung identisch Null ist.

Bemerkung 1.1. Viele Besonderheiten von dynamischen Systemen sind unverträglich mit der Existenz von Erhaltungsgrößen: in der Nähe von Quellen, Senken, oder asymptotisch stabilen Zyklen muß jede Erhaltungsgröße notwendigerweise lokal konstant sein (und damit uninteressant). Die erwähnten Besonderheiten sind sogar strukturell stabil – das heißt, sie bleiben erhalten wenn das Vektorfeld geringfügig gestört wird; trotzdem treten sie in der Hamilton-Mechanik niemals auf, wie wir noch sehen werden. Dafür werden andere Besonderheiten dynamischer Systeme, nämlich Zentren und homokline Orbits, die durch kleine Störungen verloren gehen, in der Hamilton-Mechanik strukturell stabil.

Der Apparat ist nicht gerade leicht zugänglich, drum wird in diesem Abschnitt ein Spezialfall diskutiert, der weniger an Voraussetzungen benötigt, nämlich Volums-erhaltende Vektorfelder in der Ebene.

Im folgenden sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (F_1(x, y), F_2(x, y))$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld.

Definition 1.2. Die Divergenz von F ist definiert als die Funktion

$$\operatorname{div}(F) : U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y).$$

Definition 1.3. Es sei $\phi : D \subset \mathbb{R} \times U \rightarrow U$ der Fluß von F . Das Vektorfeld F heißt *volumserhaltend* wenn für alle meßbaren Teilmengen $K \subset U$ und für alle $t_0 \in \mathbb{R}$ sodaß $[0, t_0] \times K \in D$ gilt, daß K und $\phi(t_0, K) = \{\phi(t_0, x) \mid x \in K\}$ das gleiche Volumen haben.

Der folgende Satz wird später bewiesen (mit starken Hilfsmitteln, von denen wir die meisten ohne Beweis diskutieren werden).

Satz 1.2. F ist genau dann volumenserhaltend wenn $\operatorname{div}(F) = 0$ ist.

Beispiel 1.3. Die Divergenz des linearen Vektorfelds

$$(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

ist gleich der Konstante $a + d$. Die Eigenwerte der Jacobi-matrix sind dann $\pm\sqrt{ad - bc}$. Egal ob sie reell oder komplex sind, sie können nicht beide positiven oder beide negativen Realteil haben. Wir sehen, daß es (zumindest im linearen Fall) keine hyperbolischen Quellen oder Senken geben kann. Sattelpunkte treten auf und sind strukturell stabil. Der zweite Fall, der unter kleinen

Störungen der Matrix – unter Beibehaltung der Bedingung $a + d = 0$ auftritt, ist der Fall von zwei konjugiert komplexen Eigenwerten auf der imaginären Achse. Hier ist der Nullpunkt ein so genanntes *Zentrum*: ein stabiler, aber nicht asymptotisch stabiler Gleichgewichtspunkte, der umgeben ist von lauter Zyklen.

Wir werden gleich sehen, daß dieses qualitative Verhalten auch für nichtlineare volumserhaltende Vektorfelder in der Ebene typisch ist.

Satz 1.4. *Es sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ volumserhaltend. Dann existiert eine nicht konstante stetig differenzierbare Funktion $H : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, sodaß $\partial_F(H) \equiv 0$ ist.*

Beweis. Wir setzen an

$$H(x, y) := - \int_0^x F_2(u, 0) du + \int_0^y F_1(x, v) dv.$$

Dann gilt für alle $(x, y) \in U$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) &= -F_2(x, 0) + \int_0^y \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, v) dv = -F_2(x, 0) - \int_0^y \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, v) dv = \\ &= -F_2(x, 0) - (F_2(x, y) - F_2(x, 0)) = -F_2(x, y), \\ \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) &= F_1(x, y) \end{aligned}$$

und daher

$$\partial_F(H)(x, y) = -F_2(x, y)F_1(x, y) + F_1(x, y)F_2(x, y) = 0.$$

□

Wir merken uns aus dem Beweis, dass das Vektorfeld F aus H zurückgewonnen werden kann:

$$F(x, y) = \left(\frac{\partial H}{\partial y}(x, y), -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right).$$

Die Lösungen von F bewegen sich auf den Niveau-Linien von H . Wenn p_0 ein lokales Maximum oder Minimum ist, dann sind die Niveau-Linien in einer kleinen Umgebung geschlossene Kurven, und wir erhalten Zyklen. Wenn man eine Funktion mit zwei lokalen Maxima hat, dann liegt dazwischen ein Sattelpunkte, und die Niveau-Linie in der Höhe des Sattelpunktes besteht aus einer 8-Schleife mit Kreuzungspunkt im Sattelpunkt. Die beiden Schleifen sind homokline Orbits. Wenn die Funktion H geringfügig gestört wird, bleibt das qualitative Verhalten gleich: wir bekommen immer noch einen Sattelpunkt mit zwei homoklinen Orbits.

Das gleiche Verhalten zeigt auch ein schwingendes Pendel. Der Phasenraum ist zweidimensional, parametrisiert durch die Auslenkung und die Geschwindigkeit. Es gibt zwei Gleichgewichtspunkte, beide mit Geschwindigkeit 0. Der Pendeltiefpunkt ist ein stabiles Zentrum, kleine Abweichungen geben kleine und langsame Schwingungen. Der Pendelhochpunkt ist ein Sattelpunkt. Das Gleichgewicht ist instabil, und die Bahnen in der Nähe schwingen zum Tiefpunkt und wieder zurück. Es gibt genau zwei Bahnen, die im Grenzwert genau den Sattelpunkt erreichen, nämlich wenn das Energieniveau genau dazu reichen würde, bei Geschwindigkeit Null den Hochpunkt zu erreichen.

Übung 1.4. Es sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld mit einem asymptotisch stabilen Zykel Z . Man zeige, daß jede Erhaltungsgröße $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ lokal in einer Umgebung von Z konstant ist.

2 Differentialformen

In der Vorübung haben wir gesehen, wie man für eine gegebene Funktion $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ ein Vektorfeld konstruiert, für welches H eine Erhaltungsgröße ist. Und zwar im Fall $n = 2$. Wie läßt sich diese Konstruktion für beliebige gerade Zahlen verallgemeinern?

Bemerkung 2.1. Eine allgemeine Konstruktion eines Vektorfelds aus einer Funktion ist der Gradient. Dieses Feld erfüllt aber leider gerade nicht die gewünschte Eigenschaft: die Vektorableitung entlang des Gradienten ist immer positiv außer bei Equilibrien.

Zur Verallgemeinerung benötigen wir ein neues Konzept, das der Differentialformen. Dazu muß n nicht unbedingt gerade sein.

Definition 2.2. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Eine Differentialform k -ter Ordnung oder k -Form ist eine stetig differenzierbare Abbildung $U \rightarrow \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.

Wir schreiben die Komponenten einer k -Form als Koeffizienten von symbolischen Ausdrücken der Form $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$, wobei x_1, \dots, x_k Variablen sind und die Verknüpfung \wedge antikommutativ ist, also $dx \wedge dy = -dy \wedge dx$ erfüllt für beliebige Variablen x, y . Daher ist auch $dx \wedge dx = 0$ und die Anzahl der Koeffizientenfunktionen einer k -Form ist $\binom{n}{k}$.

Die Menge aller k -Formen auf U wird mit $\Omega^k(U)$ bezeichnet.

Beispiel 2.1. Es sei $U = \mathbb{R}^2$. Alle 1-Formen die Gestalt $f(x, y)dx + g(x, y)dy$. Alle 2-Formen haben die Gestalt $h(x, y)dx \wedge dy$.

Differentialformen sind dazu erfunden worden, integriert zu werden. Für die 1-Form $f(x, y)dx + g(x, y)dy$ im Beispiel oben und für jede Kurve $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (X(t), Y(t))$ ist das Kurvenintegral definiert als

$$\int_C f(x, y)dx + g(x, y)dy = \int_0^1 f(X(t), Y(t)) \frac{dX(t)}{dt} dt + \int_0^1 g(X(t), Y(t)) \frac{dY(t)}{dt} dt.$$

Der Wert des Kurvenintegrals bleibt unverändert, wenn man die Kurve umparametrisiert.

Übung 2.3. Es sei η die 1-Form $ydx - xdy$ in $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$. Man berechne $\int_C \eta$ für die Kurve $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^a, t^b)$, wobei $a, b > 0$ Parameter sind.

Die positiven n -Formen (von maximaler Ordnung) nennt man auch Volumsformen. Wenn η eine Volumsform ist, dann ist die Zuordnung $K \mapsto \int_K \eta$ ein Volumsmaß. Die Integrale von 2-Formen sind definiert auf Flächenstücken mit Orientierung. Solche Flächenintegrale werden zum Beispiel dazu verwendet, um zu berechnen, welche Flüssigkeitsmenge in eine gegebenen Zeit durch eine gegebene Querschnittsfläche fließt.

Eine triviale Variante des Integrals hat man bei den 0-Formen, das heißt Funktionen nach \mathbb{R} . Das Integral ist für Punkte definiert, und es ist einfach die Auswertung beim Punkt.

Bemerkung 2.4. Vektorfelder auf U und 1-Formen auf U haben die gleiche "Implementierung", beide sind stetig differenzierbare Funktionen $U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Trotzdem will man die zwei Dinge unterscheiden (indem man zu jeder Funktion dazusagt, ob das jetzt ein Vektorfeld oder eine 1-Form ist). Die Unterscheidung ist sinnvoll/notwendig, weil Vektorfelder und 1-Formen verschiedene Operationen erlauben und verschiedene Eigenschaften haben.

- Vektorfelder bestimmen einen Fluß und eine Differentialgleichung, 1-Formen nicht.
- Ein Vektorfeld ordnet jeder differenzierbaren Funktion $U \rightarrow \mathbb{R}$ eine andere Funktion zu, nämlich die vektorielle Ableitung. 1-Formen hingegen ordnen jeder differenzierbaren Kurve $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Zahl zu, das Kurvenintegral.
- Vektorfelder und 1-Formen verhalten sich anders unter Koordinatentransformationen.

Tatsächlich sind 1-Formen oder überhaupt k -Formen leichter zu transformieren als Vektorfelder: man setzt ein, ersetzt $df(x_1, \dots, x_n)$ durch die Gradientenform $\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$ und beachte beim Ausmultiplizieren des Hackprodukts die Antikommutativität (für 1-Formen ist nicht einmal das notwendig). Zum Beispiel ist die Transformation der Volumsform $dx \wedge dy$ in Polarkoordinaten

$$d(r \cos \phi) \wedge d(r \sin \phi) = (\cos \phi dr - r \sin \phi d\phi) \wedge (\sin \phi dr + r \cos \phi d\phi) =$$

$$\begin{aligned} \cos \phi \sin \phi \, dr \wedge dr + r(\cos \phi)^2 dr \wedge d\phi - r(\sin \phi)^2 d\phi \wedge dr - r^2 \cos \phi \sin \phi \, d\phi \wedge d\phi = \\ r((\cos \phi)^2 + (\sin \phi)^2) \, dr \wedge d\phi = r \, dr \wedge d\phi. \end{aligned}$$

Sie erinnern sich an Übungszettel 7 und 9: um Vektorfelder zu transformieren, muß man nach dem Einsetzen und Umformen auch noch ein Gleichungssystem lösen (oder eine Jacobi-Matrix invertieren).

Differentialformen kann man nicht nur bezüglich Koordinatentransformationen (Isomorphismen) transformieren: das Einsetzen und Ausmultiplizieren geht genauso wenn man nur eine Abbildung $f : U \rightarrow V$ hat; U und V müssen dabei nicht einmal die selbe Dimension haben. Die Rücktransformation von $\eta \in \Omega^k(V)$ nach f ergibt eine k -Form $f^*\eta \in \Omega^k(U)$ (oder 0 wenn $k > \dim U$ ist). In jedem Fall gilt die allgemeine Substitutionsformel

$$\int_{f(K)} \eta = \int_K f^*\eta$$

für k -dimensionale Flächenstücke in V . Zur Berechnung eines Integrals einer k -form auf einer k -dimensionalen Fläche kann man eine Parametrisierung $p : U \rightarrow K$ mit $U \subset \mathbb{R}^k$ nehmen und dann die rücktransformierte k -Form auf U integrieren.

Übung 2.5. Man berechne das Kurvenintegral von Übung 2.3 durch Rücktransformation der 1-Form $ydx - xdy$ entlang der Parametrisierung $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t^a, t^b)$.

Definition 2.6. Die *äußere Ableitung* $d : \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U)$ ist definiert durch die folgenden Rechenregeln:

- $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$ für $f \in \Omega^0(U)$;
- $d(f \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) = df \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k$
- $d(\eta_1 + \eta_2) = d\eta_1 + d\eta_2$.

Eine Differentialform $\eta \in \Omega^k(U)$ heißt *geschlossen*, wenn $d\eta = 0$ ist.

Zweimalige äußere Ableitung gibt immer 0. Daher ist jede Differentialform der Form $d\gamma$ geschlossen. Für $U = \mathbb{R}^n$ oder die für das Kugellinnere $U = \{x \mid x < \epsilon\}$ gilt auch die Umkehrung: jede geschlossene Form kann also Ableitung geschrieben werden.

Wie man aus der Definition sieht, ist der Gradient einer Funktion kein Vektorfeld, sondern eine 1-Form. Oder besser gesagt, es macht mehr Sinn, den Gradient als 1-Form zu verstehen. Die folgende Übung soll das verdeutlichen.

Übung 2.7. Das lineare Vektorfeld $(x, y) \mapsto (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y)$ ist ein Gradientenfeld, wenn $a_2 = b_1$ ist. Man zeige, daß eine lineare Koordinatentransformation eines linearen Gradientenfeldes nicht immer ein Gradientenfeld ist.

Wann ist eine 1-Form $(a_1x + b_1y)dx + (a_2x + b_2y)dy$ geschlossen? Man zeige, daß jede lineare Koordinatentransformation einer geschlossenen linearen 1-Form wieder geschlossen ist.

Neben dem Gradient lassen sich auch die Operatoren div und curl als Spezialfälle der äußeren Ableitung interpretieren.

- Es sei $F : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n))$ ein Vektorfeld. Wir schreiben das Vektorfeld rein formal um als $(n-1)$ -Form $\eta := F_1(x_1, \dots, x_n) dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - F_2(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n - \dots \pm F_n(x_1, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$. Dann ist $d\eta = \operatorname{div}(F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$.
- Die äußere Ableitung der 1-Form $\eta := F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$ in $\Omega^1(\mathbb{R}^2)$ ist die 2-Form

$$d\eta = \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \wedge dx_2 + \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) dx_3 \wedge dx_1.$$

Man vergleiche mit der Formel für die Rotation (curl) eines Vektorfelds im \mathbb{R}^3 .

Der nächste Satz (allgemeine Stokes'sche Integralformel) wird in dieser Vorlesung nicht verwendet, ich möchte ihn aber trotzdem (ohne Beweis) erwähnen, weil es eben der wichtigste Satz über die äußere Ableitung ist.

Satz 2.2. *Es sei $\eta \in \Omega^k$ und K ein $k + 1$ -dimensionales Flächenstück mit Rand ∂K . Dann gilt*

$$\int_{\partial K} \eta = \int_K d\eta.$$

Hier die wichtigsten Spezialfälle.

- $k = 1$: Das Kurvenintegral des Gradienten von f ist die Differenz der Auswertung der Funktion an den Endpunkten der Kurve.
- $k = 2, n = 3$ (Gaußscher Integralsatz): das Integral der Divergenz von F über eines dreidimensionalen Bereich K ist das Oberflächenintegral von F entlang des Randes.
- $k = 1, n = 3$ (Satz von Stokes): das Kurvenintegral eines Vektorfelds entlang einer geschlossenen Kurve ist gleich dem Flächenintegral der Rotation über ein einem Flächenstück, das von dieser Kurve begrenzt wird.

Definition 2.8. Für k -Formen $\eta \in \Omega^k(U)$ und Vektorfelder $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist die *Verkürzung* $i_F(\eta)$ definiert als eine $k - 1$ -Form durch folgende Rechenregeln.

- $i_{(F_1, \dots, F_n)}(dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) = F_{i_1} dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} - F_{i_2} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k} + \dots \pm F_{i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{k-1}}$.
- $i_F(f\eta_1 + \eta_2) = f i_F(\eta_1) + i_F(\eta_2)$ für alle $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, das heißt die Verkürzung ist linear über dem Ring der Funktionen.

Um die Verkürzung zu berechnen, muß man nichts ableiten, nur multiplizieren und addieren.

Übung 2.9. Die Verkürzung einer Differentialform verhält sich gutartig bei Koordinatentransformationen: Es sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld. Es sei $\tau : V \rightarrow U$ ein Isomorphismus. Es sei und $\tilde{F} : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ das transformierte Vektorfeld. Es sei $\eta \in \Omega^k(U)$. Dann ist $i_{\tilde{F}}(\tau^*(\eta)) = \tau^*(i_F(\eta))$. Man zeige dies für den Fall $n = 1$ und $k = 1$.

Wir haben bereits die vektorielle Ableitung einer Funktion besprochen. Auch für Differentialformen ist die vektorielle Ableitung definiert.

Definition 2.10. Es sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld mit Fluß $\phi : (D \subset \mathbb{R} \times U) \rightarrow U$. Für jede k -Form η ist die vektorielle Ableitung definiert durch

$$\partial_F(\eta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(\eta) - \eta}{t},$$

wobei $\phi_t(x) := \phi(t, x)$ ist.

Proposition 2.3. *Für Vektorfelder $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ und k -Formen η gilt die Formel*

$$\partial_F(\eta) = d(i_F(\eta)) + i_F(d\eta).$$

Übung 2.11. Man zeige, daß die Formel für 0-Formen stimmt.

Wir können nun den Beweis von Satz 1.2 nachtragen: ein Vektorfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist volumserhaltend, wenn die vektorielle Ableitung der konstanten Volumsform verschwindet: $\partial_F(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \equiv 0$. Nach Proposition 2.3 ist das äquivalent zu $d(i_F(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)) \equiv 0$ (der zweite Summand in der Formel verschwindet, weil die äußere Ableitung einer k -Form 0 ist). Wenn $F = (F_1, \dots, F_n)$ ist, dann ist

$$i_F(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = F_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - F_2 dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n - \dots \pm F_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$$

und daher

$$d(i_F(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)) = \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \operatorname{div}(F) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n;$$

und diese Form ist genau dann 0 wenn $\operatorname{div}(F) \equiv 0$ ist.

3 Hamilton-Mechanik

Zur Erinnerung: die Hamilton-Mechanik beruht auf Erhaltungsgrößen. Im 2-dimensionalen Fall ist es gelungen, zu einer gegebenen Funktion nach \mathbb{R} ein Vektorfeld zu konstruieren, sodaß die die vektorielle Ableitung der Funktion verschwindet. Wir haben dazu das Konzept des Volumens verwendet, welches durch eine Volumsform bestimmt ist. Im Rückblick mit der Brille der Differentialformen kann man sagen, daß wir aus jedem $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ zuerst das Differential $dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial y} dy \in \Omega^1(U)$ genommen haben und dann das Vektorfeld H so bestimmt haben, daß $i_H(dx \wedge dy) = dh$ gilt. Daraus folgt dann

$$\partial_H(h) = i_H(dh) + d(i_H(h)) = i_H(i_H(dx \wedge dy)) = 0,$$

wenn man berücksichtigt, daß $i_H \circ i_H \equiv 0$ ist.

Übung 3.1. Man zeige, dass für alle Vektorfelder F, G und für jede k -Form η gilt: $i_F(i_G(\eta)) = -i_G(i_F(\eta))$. Daraus folgt $i_F(i_F(\eta)) = 0$.

Ein nochmaliger Blick sagt uns, daß die Rechnung für beliebige Dimension aufgehen sollte, nur muß man statt der Volumsform eine 2-Form nehmen. Statt der Positivität fordern wir die folgende Eigenschaft.

Definition 3.2. Eine 2-Form $\omega \in \Omega^2(U)$ heißt *symplektisch*, wenn sie geschlossen ist und wenn die Abbildung $i^\omega : Vect(U) \rightarrow \Omega^1(U)$, $F \rightarrow i_F(\omega)$ bijektiv ist. Dabei ist $Vect(U)$ die Menge aller Vektorfelder auf U .

Es sei $\omega = \sum_{i < j} \omega_{ij} dx_i \wedge dx_j$. Dann ist die Abbildung $F \rightarrow i_F(\omega)$ genau dann bijektiv wenn für alle $p \in U$ die schiefsymmetrische Matrix $M_\omega := (\omega_{ij}(p))_{ij}$ invertierbar ist; dabei setzen wir $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ für $j > i$. Die Koeffizienten der Form $i_\omega(F)$ sind nämlich genau die Koordinaten von $-M_\omega(F)$.

In der Hamilton-Mechanik ist der Phasenraum eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit einer symplektischen Form ω . Die zeitliche Entwicklung wird durch eine Vektorfeld der Form $i^{-\omega}(dh)$ beschrieben. Die Erhaltungsgröße h heißt *Hamilton-Funktion*, und das dazugehörige Vektorfeld $H := i^{-\omega}(dh)$ heißt *Hamilton-Vektorfeld*. $i^{-\omega}$ ist eine Abkürzung für $(i^\omega)^{-1}$.

Was ist aus der Newton-schen Forderung, daß n gerade sein muß, geworden?

Proposition 3.1. *Schiefsymmetrische invertierbare Matrizen (und daher symplektische Formen) existieren nur in gerader Dimension.*

Beweis. Wenn S eine schiefsymmetrische $n \times n$ -Matrix ist, dann ist $\det(S) = \det(-S^T) = (-1)^n \det(S)$. Für ungerade n folgt $\det(S) = 0$. \square

Bemerkung 3.3. Was ist der Sinn der Forderung, daß ω geschlossen sein muß? Es sei h eine Hamilton-Funktion mit Hamilton-Vektorfeld H . Dann ist

$$\partial_H(\omega) = i_H(d\omega) + d(i_H(\omega)) = i_H(d\omega) + d(dh) = i_H(d\omega).$$

Wenn ω geschlossen ist, dann folgt $\partial_H(\omega) = 0$, und das ist schon wünschenswert (und zwar für jedes Hamilton-Vektorfeld H). Wäre dem nicht so, dann würde der Fluß die symplektische Form verändern.

Beispiel 3.2 (Standard-Form). Es sei $n = 2m$. Wir bezeichnen die Koordinaten des \mathbb{R}^n mit $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$. Dann ist

$$\omega = \sum_{i=1}^m dp_i \wedge dq_i$$

symplektisch. Die Matrix M_ω ist die Blockmatrix $\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$ (die einfachste schiefsymmetrische invertierbare Matrix, die es man sich vorstellen kann). Für die Hamilton-Funktion $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir das Hamilton-Vektorfeld

$$i^{-\omega}(h) = \left(\frac{\partial h}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial q_m}, -\frac{\partial h}{\partial p_1}, \dots, -\frac{\partial h}{\partial p_m} \right).$$

Beispiel 3.3 (Teilchen in Potentialfeld). Wir betrachten ein Teilchen mit Masse 1 in \mathbb{R}^3 , das sich in einem Kraftfeld bewegt. Die Kraft ist minus der Gradient einer Potentialfunktion $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Wir bezeichnen die Ortskoordinaten mit q_1, q_2, q_3 und die Geschwindigkeitskoordinaten mit p_1, p_2, p_3 . Die symplektische Form ist die Standard-Form. Die potentielle Energie ist $u(q_1, q_2, q_3)$ und die kinetische Energie ist $\frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)$. Die Hamilton-Funktion ist die Gesamtenergie

$$h(p_1, \dots, q_3) = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + u(q_1, q_2, q_3).$$

Die Bewegungsgleichungen sind

$$p_i' = -\frac{\partial h}{\partial q_i} = -\frac{\partial u}{\partial q_i}, \quad q_i' = \frac{\partial h}{\partial p_i} = p_i, \quad i = 1, \dots, 3.$$

Wenn man die Geschwindigkeitsfunktionen in der zweiten Gleichung in die erste Gleichung einsetzt, ergeben sich die Newton-schen Bewegungsgleichungen $q_i'' = -\frac{\partial u}{\partial q_i}$, $i = 1, \dots, 3$.

Bei der Untersuchung von struktureller Stabilität von Hamilton-Systemen nimmt man an, daß die symplektische Form die Standard-Form ist, und stört nur die Hamilton-Funktion und nicht die symplektische Form (so wie wir es auch schon im 2-dimensionalen Fall gemacht haben). Die Rechtfertigung für ein solches Vorgehen ist der folgende Satz.

Satz 3.4 (Darboux). *Für jede symplektische Form und für jeden Punkt $x_0 \in U$ existiert eine Umgebung V von x_0 und eine lokale Koordinaten-Transformation $W \rightarrow V$, die die gegebene Form in die Standard-Form transformiert.*

Zusatz: Wenn zusätzlich ein Hamilton-Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist, deren Gradient in x nicht Null ist, dann kann man die Koordinatentransformation so wählen, daß h die erste Koordinatenfunktion ist.

Bemerkung 3.4. Man reduziert also lokal auf den Fall ω ist die Standardform und $h = p_1$. Die Bewegungsgleichungen lassen sich sofort lösen: $p_1, \dots, p_m, q_2, \dots, q_m$ sind konstant, und $q_1(t) = p_1 t + c$. Man vergleiche mit dem ersten Newton-schen Gesetz.

Zum Beweis benötigen wir ein letzte Definition, die Poisson-Klammer $\{, \} : \Omega^0(U) \times \Omega^0(U) \rightarrow \Omega^0(U)$. Man kann sie auf mehrere Arten definieren. Es seien $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$, $F := i^{-\omega}(f)$, $G := i^{-\omega}(g)$. Dann ist

$$\{f, g\} = \partial_G(f) = -\partial_F(g) = i_F(i_G(\omega)) = -i_G(i_F(\omega)).$$

Aus der Definition folgt, daß sich die Wert einer Funktion entlang einer Bewegungsbahn wie seine Poisson-Klammer mit der Hamilton-Funktion ändert. Insbesondere gilt das für die Koordinatenfunktionen p_1, \dots, q_m :

$$p_i' = \{p_i, h\}, \quad q_i' = \{q_i, h\}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Diese Formulierung spielt eine Rolle in der Quantenmechanik.

Eigenschaften der Poisson-Klammer. Es seien $f, g, h : U \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

Linearität $\{f, cg + h\} = c\{f, g\} + \{f, h\}$

Antikommutativität $\{f, g\} = -\{g, f\}$

Leibniz-Regel $\{f, gh\} = g\{f, h\} + h\{f, g\}$

Jacobi-Identität $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

Vektorielle Ableitung Es sei $F := i^{-\omega}(f)$, $G := i^{-\omega}(g)$, $[F, G] := i^{-\omega}(\{f, g\})$.

Dann ist $\partial_F \circ \partial_G - \partial_G \circ \partial_F = \partial_{[F, G]}$

Standard-Darstellung Wenn ω die Standard-Form ist, dann ist $\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$.

Wenn $\{f, g\}$ konstant ist, dann ist kommutieren die beiden Vektorfelder: $\partial_F \circ \partial_G = \partial_G \circ \partial_F$. Dann kommutieren auch die beiden Flussabbildungen $x \mapsto \phi_F(t, x)$ und $x \mapsto \phi_G(s, x)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

Beweis von Satz 3.4. . Induktion nach m . Für $m = 1$ nehmen wir eine beliebige stetig differenzierbare Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, die bei x_0 nicht stationär ist (also $H(x_0) \neq 0$). Es sei $Y \subset U$ eine Gerade durch x_0 , die H transversal schneidet. Wir definieren auf einer geeigneten Umgebung V von x_0 die Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ als "Ankunftszeit in Y ", also so dass $\phi_H(f(x), x) \in Y$ gilt für alle $x \in V$. Dann ist $\delta_H(f) = 1$, und daher $\omega = df \wedge dh$; in den Koordinaten (f, h) ist ω die Standard-Form.

Es sei $m > 1$. Wir wählen wieder eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{R}$, die bei x_0 nicht stationär ist, und eine Hyperebene $Y \subset U$ durch x_0 , die $H := i^{-\omega}(h)$ transversal schneidet. Wir definieren f wieder als "Ankunftszeit in Y ". Dann ist $\partial_H(f) = 1$. Die erste und die $(m + 1)$ -te Koordinatenfunktion haben wir dann schon. Außerdem gilt, dass die Vektorfelder H und $F := i^{-\omega}(f)$ vertauschbar sind, weil $\{f, h\} = 0$ ist.

Wir wählen einen $(n - 2)$ -dimensionalen Unterraum $Z \subset U$ durch x_0 , der beide Vektorfelder transversal schneidet. In einer Umgebung V von x_0 kann man jeden Punkt durch die Flüsse F und H zu einem eindeutig bestimmten Punkt in Z steuern. Damit kann man eine stetig differenzierbare Projektionsabbildung $\pi : V \rightarrow Z$ definieren, sodaß $\pi(z) = z$ für alle $z \in U$ ist.

Die Einschränkung $\omega|_Z$ ist eine symplektische Form auf Z , die Einschränkung von geschlossenen Formen ist nämlich immer geschlossen. (Streng genommen müßten wir auch noch zeigen, dass die Matrix der eingeschränkten Form nicht-degeneriert sein, das ist aber nicht sehr überraschend und wir sparen es uns.) Nach Induktionsvoraussetzung gibt Koordinatenfunktionen $u_2, \dots, u_m, v_2, \dots, v_m : Z \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $\omega|_Z = \sum_{i=2}^m du_i \wedge dv_i$ ist. Wir definieren die Koordinatenfunktionen

$$p_1 := f, \quad q_1 := h, \quad p_i := \pi^*(u_i) = u_i \circ \pi, \quad q_i := \pi^*(v_i) = v_i \circ \pi, \quad i = 2, \dots, m.$$

Dann gilt $\{p_i, f\} = \partial_F(p_i) = 0$ und $\{p_i, h\} = \partial_H(p_i) = 0$, weil p_i entlang den Flüssen von F und H konstant ist; analog $\{q_i, f\} = \{q_i, h\} = 0$. Auf dem Unterraum Z ist auch $\{p_i, q_i\} = \delta_{ij}$ für $i, j = 2, \dots, m$. Die vektorielle Ableitung von $\{p_i, q_i\}$ nach F ist aber nach der Jacobi-Identität gleich

$$\{f, \{p_i, q_j\}\} = -\{p_i, \{q_j, f\}\} - \{q_j, \{f, p_i\}\} = -\{p_i, 0\} - \{q_j, 0\} = 0,$$

und analog für die vektorielle Ableitung nach H . Daher ist $\{p_i, q_i\} = 0$ auf ganz V . Das bedeutet, dass ω im Koordinatensystem p_1, \dots, q_m die Standard-Form ist.

Der Zusatz folgt daraus, daß man am Beginn der Induktion h beliebig wählen kann, wenn nur der Gradient bei x_0 nicht verschwindet. \square

In der Literatur zur Hamilton-Mechanik findet man kaum Beispiele, bei denen die symplektische Form *nicht* die Standard-Form ist. Das folgende Beispiel zeigt aber, dass man das auch übertreiben kann.

Beispiel 3.5 (Magnetfeld). Wir betrachten ein elektrisch geladendes Teilchen mit Masse 1, das sich in einem Magnetfeld $M : (q_1, q_2, q_3) = (M_1(\dots), M_2(\dots), M_3(\dots))$ bewegt. Wir nehmen die Geschwindigkeitskoordinaten v_1, v_2, v_3 noch dazu und wollen dann auf die Bewegungsgleichungen

$$\vec{q}' = \vec{v}, \quad (\vec{p})' = M(\vec{q}) \times \vec{p}$$

kommen. Dazu wählen wir die Form

$$\omega = p_1 \wedge q_1 + p_2 \wedge q_2 + p_3 \wedge q_3 - M_1(\vec{q}) dq_2 \wedge dq_3 - M_2(\vec{q}) dq_3 \wedge dq_1 - M_3(\vec{q}) dq_1 \wedge dq_2,$$

d.h. die Standard-Form minus die Verkürzung der 3-Form $dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3$ mit dem Vektorfeld M ; sowie die Hamilton-Funktion

$$h(\vec{v}, \vec{q}) = \frac{1}{2} \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle.$$

Die Inverse von $(-M_\omega)$ ist dann die 6×6 Blockmatrix $\begin{pmatrix} 0 & -I_3 \\ I_3 & B \end{pmatrix}$, wobei A die 3×3 -Matrix ist, für die $A\vec{v} = M(\vec{q} \times \vec{v})$ ist. Das Hamilton-Vectorfeld $H = i^{-\omega}(h)$ definiert dann genau die Bewegungsgleichungen oben.

Um die symplektische Form auf Standard-Form zu bringen, lassen wir die Ortskoordinaten unverändert und ersetzen die Geschwindigkeitskoordinaten v_i durch Impulskoordinaten $p_i := v_i + n_i$, $i = 1, 2, 3$. Wir setzen der Einfachheit halber $M = (0, 0, 1)$. In den neuen Koordinaten ist

$$\begin{aligned} \omega = & dp_1 \wedge d(p_1 - n_1) + dp_2 \wedge d(p_2 - n_2) + dp_3 \wedge d(p_3 - n_3) - dq_1 \wedge dq_2 = \\ & dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 + dp_3 \wedge dq_3 \\ & - dq_1 \wedge dq_2 - dn_1 \wedge dq_1 - dn_2 \wedge dq_2 - dn_3 \wedge dq_3, \end{aligned}$$

das heißt der Term in der letzte Zeile soll Null werden. Durch Draufschaun lassen sich zwei Möglichkeiten erraten, nämlich $(n_1, n_2, n_3) = (0, -q_1, 0)$ oder $(n_1, n_2, n_3) = (q_2, 0, 0)$.

Der Summand \vec{n} wird in der Literatur “magnetischer Impuls” genannt. Wie das Beispiel oben zeigt, hängt dieser magnetische Impuls nicht nur vom Magnetfeld ab, sondern auch von der Art, wie man auf Standard-Form transformieren will. Wenn man sich allerdings damit abfindet, dass die symplektische Form eben manchmal auch anders sein kann, braucht man den magnetischen Impuls gar nicht.

Woher kommt die symplektische Struktur? Hier ein Versuch einer Antwort auf diese berechtigte Frage (auf Fragen nach dem Wesen von Dingen gibt es oft keine eindeutige Antwort): Die symplektische Struktur ist einfach ein naturgegebener Teil des Phasenraums, an den wir nicht so gewöhnt sind. Wir sind schon eher gewöhnt an die Struktur des Volumens, der ja auch durch eine Differentialform beschrieben wird. Zur zweiten Frage, wie man sie berechnet: die symplektische Struktur bestimmt: man will auf jeden Fall haben, dass das Vektorfeld P , das den Ort linear in eine bestimmte Richtung verschiebt und den Impuls unverändert lässt, zur Impuls-Funktion in die diese Richtung gehört. Dadurch sind schon 3/4 der Einträge von M_ω eindeutig festgelegt. Es bleibt noch die Bestimmung des restlichen Viertels, das von einem Magnetfeld abhängen kann; im Beispiel oben wurde diese Viertel so gewählt, dass die Ablenkung der Geschwindigkeit in durch das Magnetfeld einfließt. Am logischsten wäre es, das restliche Viertel auch noch aus Symmetrien herzuleiten.

4 Der geodätische Fluss

Die Bewegung eines Teilchens mit Masse 1 in einer gekrümmten Mannigfaltigkeit im Raum (was immer das ist, z.B. eine Fläche im \mathbb{R}^3) erfolgt nach den Gesetzen der Hamilton-Mechanik auf “geodätischen Kurven”, das heißt solche, die die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten sind, die nahe genug zueinander sind. Auf der Kugel sind die geodätischen Kurven genau die Großkreise. Die geodätischen Kurven auf Ellipsoiden lassen sich nur numerisch berechnen und zeigen chaotisches Verhalten. Ein degenerierter Fall tritt auf, wenn man das Ellipsoid immer flacher macht, sodass man im Grenzwert eine Fläche bekommt, die aus zwei zusammengeklebten Inneren von der gleichen Ellipse besteht. Im Grenzfall sind die geodätischen Kurven Geraden im Innern der Ellipse, die, sobald sie en Rand erreichen, an der Tangente gespiegelt werden, sodass sie wieder ins Innere weitergehen, aber auf der Rückseite. Mit anderen Worten, es ist die Bahn einer Billardkugel auf einem Tisch, der die Form einer Ellipse hat. Auch diese stückweise geraden Linien zeigen chaotisches Verhalten.

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen für diese geodätische Bewegung aufstellen. Es seien $m \leq M$ zwei natürliche Zahlen, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, und $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^M$ eine differenzierbare Abbildung, deren Jacobi-Matrix Rang m in jedem Punkt hat. Dann (und nur dann) ist das Bild $\alpha(U)$ eine m -dimensional “Mannigfaltigkeit” im \mathbb{R}^M . Wir bezeichnen die Koordinaten in U mit $\vec{q} = (q_1, \dots, q_m)$. Der Geschwindigkeitsvektor im Parameter-Raum U ist \vec{q}' . Für die kinetische Energie ist die Geschwindigkeit im \mathbb{R}^M interessant: Sie ist $J(\vec{q})\vec{q}'$, wobei $J(\vec{q})$ die Jacobi-Matrix von α

sei; eine $m \times M$ -Matrix von Rang m . Nach Newton sind die Geschwindigkeiten Teil des Systems, wir führen also zusätzliche Koordinatenfunktionen q_1, \dots, q_m ein, sodaß die Geschwindigkeit dem Vektor \vec{q} entspricht. Die Hamilton-Funktion ist die kinetische Energie

$$h := \frac{1}{2} \langle J(\vec{q})\vec{q} | J(\vec{q})\vec{q} \rangle = \frac{1}{2} \langle \vec{q} | A(\vec{q})\vec{q} \rangle,$$

wobei $A(\vec{q}) := J(\vec{q})^T J(\vec{q})$ ist. Diese ist eine $m \times m$ -Matrix von Rang m , also invertierbar.

Bemerkung 4.1. In einer früheren Version und auch in der Vorlesung habe ich die Funktionen $\dot{q}_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ einfach mit q'_i bezeichnet; für ein Teilchen mit Bahn $t \mapsto q_i(t)$ entsprechen sie auch den Ableitungen der Ortsfunktionen in Abhängigkeit von t . Damit verliert man aber das Recht, den Strich als Differentialoperator von Funktionen von \mathbb{R} irgendwohin zu gebrauchen, und das ist auch nicht gut. Darum führen wir neue Funktionssymbole ein, die den Geschwindigkeiten entsprechen. Noch einmal: die q_i und \dot{q}_i sind Funktionen des Phasenraums, man stelle sie sich als messbare Eigenschaften des Teilchens vor.

Bemerkung 4.2. Im folgenden werden wir die Ortskoordinaten \dot{q}_i durch Impulskordinaten p_i ersetzen, also eine Koordinatentransformation durchführen. Durch die neuen Koordinaten wird allerdings auch die Bedeutung der Notation für die partielle Ableitung geändert. Die folgende Übung soll das verdeutlichen.

Übung 4.3. Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$, $f, u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, wobei (u, v) ein Koordinatensystem bilden (damit ist gemeint, die Funktion $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ ist ein Isomorphismus). Man berechne $\frac{\partial f}{\partial u} : U \rightarrow \mathbb{R}$ in folgenden Fällen.

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2, u(x, y) = x, v(x, y) = y$
- b) $f(x, y) = x^2 + y^2, u(x, y) = x + y, v(x, y) = y$
- c) $f(x, y) = x, u(x, y) = x^2 + y^2, v(x, y) = y$

Um die symplektische Standard-Form zu bekommen, definieren wir den Impuls als $\vec{p} := A(\vec{q})\vec{q}$ und ersetzen die Geschwindigkeitskoordinaten durch Impulskordinaten mittels $\vec{q} := A(\vec{q})^{-1}\vec{p}$. Es ergibt sich

$$h(\vec{p}, \vec{q}) = \frac{1}{2} \langle A^{-1}(\vec{q})\vec{p} | \vec{p} \rangle$$

und die Bewegungsgleichungen sind

$$\vec{q}_i' = \frac{\partial h}{\partial p_i} = \frac{1}{2} \langle A^{-1}(\vec{q})\vec{p} | e_i \rangle + \frac{1}{2} \langle A^{-1}(\vec{q})e_i | \vec{p} \rangle = \langle A^{-1}(\vec{q})\vec{p} | e_i \rangle = (A^{-1}(\vec{q})\vec{p})_i, \quad (1)$$

wobei e_i der i -te Einheitsvektor ist; sowie

$$\vec{p}_i' = -\frac{\partial h}{\partial q_i} = -\frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial A^{-1}(\vec{q})}{\partial q_i} p_i | p_i \right\rangle. \quad (2)$$

Die Gleichung (1) ist natürlich äquivalent zu $\vec{q}' = A^{-1}(\vec{q})\vec{p}$, genau die Identität die wir zur Definition des Impulses verwendet haben.

Beispiel 4.1 (Doppelpendel). Ein Teilchen A mit Masse 1 ist an einem Stab der Länge mit dem Nullpunkt O in \mathbb{R}^2 verbunden. Ein zweites Teilchen B , ebenfalls mit Masse 1, ist an einem Stab der Länge mit Teilchen A verbunden. Wir berechnen die Bewegungsgleichung als geodätischen Fluss einer Fläche im \mathbb{R}^4 .

Die Parameter q_1 und q_2 seien die Winkel der Einheitsvektoren \vec{OA} und \vec{AB} . Die Punkt A in der Ebene hat dann Koordinaten $(\cos(q_1), \sin(q_1))$, und der Punkt B hat Koordinaten $(\cos(q_1) + \cos(q_2), \sin(q_1) + \sin(q_2))$. Die Geschwindigkeiten sind für Punkt A gleich $q'_1(-\sin(q_1), \cos(q_1))$ und für B gleich $q'_1(-\sin(q_1), \cos(q_1)) + q'_2(-\sin(q_2), \cos(q_2))$. Die gesamte kinetische Energie berechnet sich aus

$$2h = \dot{q}_1^2 + \left(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(q_1) \\ \cos(q_1) \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -\sin(q_2) \\ \cos(q_2) \end{pmatrix} \right\rangle + (\dot{q}_2)^2 \right)$$

$$= 2\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2).$$

Das entspricht der Länge des Geschwindigkeitsvektors der Parametrisierung

$$\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4, (q_1, q_2) \mapsto (\cos(q_1), \sin(q_1), \cos(q_1) + \cos(q_2), \sin(q_1) + \sin(q_2)).$$

Für die symmetrische Matrix A und ihre Inverse haben wir

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \cos(q_1 - q_2) \\ \cos(q_1 - q_2) & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{2 - \cos^2(q_1 - q_2)} \begin{pmatrix} 1 & -\cos(q_1 - q_2) \\ -\cos(q_1 - q_2) & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Bewegungsgleichungen erhält man durch Einsetzen in die Gleichungen (1) und (2).

Will man die Gleichungen eines Doppelpendels unter dem Einfluß der Schwerkraft bzw. eines Potentialfeldes untersuchen, dann muss man nur einen Term für die potentielle Energie zu h addieren. Das Doppelpendel unter dem Einfluss der Schwerkraft zeigt übrigens chaotisches Verhalten: siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Double_pendulum#/media/File:Trajektorie_eines_Doppelpendels.gif.

Übung 4.4. Die drei Teilchen A, B, C haben Masse 1 und bewegen sich ohne Einfluss von äußeren Kräften. Teilchen A ist mit den beiden anderen Teilchen jeweils durch einen Stab der Länge 1 verbunden. Man stelle die Bewegungsgleichung auf (geodätische Bewegung auf einer 4-dimensionalen Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^6).

Der große Vorteil der Hamilton-Mechanik ist nicht unbedingt eine leichtere Lösbarkeit der Bewegungsgleichungen (hier ist manchmal die direkte Newton-Methode einfacher), sondern dass es erleichtert wird, Erhaltungsgrößen zu finden. Eine Erhaltungsgröße für das Hamilton-Vektorfeld $H = i^{-\omega}(h)$ ist eine Funktion f mit $\{f, h\} = 0$.

Im Beispiel 4.1 gilt offensichtlich $h(p_1, p_2, q_1, q_2) = h(p_1, p_2, q_1 + t, q_2 + t)$, d.h. die Hamilton-Funktion ist invariant unter dem Vektorfeld $(0, 0, 1, 1) = i^{-\omega}(d(p_1 + p_2))$. Das bedeutet, dass die Funktion $p_1 + p_2$ eine Erhaltungsgröße ist: der Gesamt-Drehimpuls. Zusammen mit der Hamilton-Funktion hat man hier schon 2 unabhängige Erhaltungsgrößen.

Definition 4.5. Es sei $U \subset \mathbb{R}^{2m}$ und $\omega \in \Omega^2(U)$ eine symplektische Form. Ein Hamilton-Vektorfeld $H = i^{-\omega}(h)$ heißt *vollständig integrabel*, wenn m Funktionen f_1, \dots, f_m existieren, sodaß

- die Gradienten df_1, \dots, df_m linear unabhängig sind;
- die Funktionen Erhaltungsgrößen sind, d.h. $\{f_i, h\} = 0$ für $i = 1, \dots, m$;
- die Poisson-Klammern $\{f_i, f_j\}$ alle gleich 0 sind für $i, j = 1, \dots, m$.

Lokal gibt es wegen dem Satz von Darboux (erweiterte Version) für jeden Punkt x_0 mit $H(x_0) \neq 0$ eine Umgebung, auf der h vollständig integrabel ist. Im Fall $m = 1$ hat man vollständige Integrabilität auf der offenen Menge aller Punkte, die keine Equilibrien sind (warum?).

Bemerkung 4.6. Wenn $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine Erhaltungsgröße ist, dann ist auch f^2 eine Erhaltungsgröße. Diese Erkenntnis bringt aber nichts für die Integrabilität, weil der Gradient von f^2 in jedem Punkt ein Vielfaches vom Gradienten von f ist.

Übung 4.7. Man zeige, daß die Hamilton-Funktion in Beispiel (4.1) vollständig integrabel ist auf der offenen Menge $p_1^2 + p_2^2 \neq 0$.

Man kann zeigen, daß es keine $m + 1$ Funktionen mit linear unabhängigen Gradienten geben kann, deren Poisson-Klammer paarweise Null ist.

Sei $H = i^{-\omega}(h)$ eine vollständig integrables Hamilton-Vektorfeld. In dieser Situation kann man den Fluss topologisch recht gut beschreiben. Es sei $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Abbildung (f_1, \dots, f_m) . Da die f_i alle erhalten bleiben, bewegen sich die Flüsse in den Urbildern von Punkten von ϕ (auch

bezeichnet als “Fasern” von ϕ). Man kann mit Methoden der Differentialgeometrie zeigen, daß diese Fasern immer Dimension m haben.

Es sei nun $Y \subset U$ eine solche Faser und $y_0 \in Y$. Es seien $F_1 := i^{-\omega}(f_1), \dots, F_m := i^{-\omega}(f_m)$. Dann ist die mehrdimensionale Fluss-Abbildung

$$\rho : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow Y, (t_1, \dots, t_m) \rightarrow \phi_{F_1}(t_1, \phi_{F_2}(t_2, \dots, \phi_{F_m}(t_m, y_0) \dots))$$

lokal invertierbar, weil die Jacobi-Determinante eine Matrix ist, in deren Spalten die Vektorfelder F_1, \dots, F_m stehen, und die sind linear unabhängig. Es sei $Z \in D$ die Menge aller Punkte u , für die $\rho(u) = y_0$ ist. Aus der uns bekannten Eigenschaft des Flusses $\phi(s, \phi(t, x)) = \phi(s + t, x)$ und aus der Vertauschbarkeit der Flüsse folgt, dass $\rho(u_1) = \rho(u_2) \Leftrightarrow u_1 - u_2 \in Z$ gilt. Außerdem ist Z ein \mathbb{N} -Modul: die Summe bzw. Differenz zweier Elemente in Z liegt wieder in Z . Das Bild, das sich daraus ergibt, ist die Parametrisierung eines Zylinders oder Torus.

Die Flüsse von F_1, \dots, F_m sind im Parameter-Raum D linear. Die Hamilton-Funktion h hängt nur von den Werten von f_1, \dots, f_m ab, also ist der Gradient eine Linearkombination der Gradienten der f_i , und der Fluss von H ist im Parameterraum ebenfalls linear. Die Bahnen in U sind dann Bilder von Geraden unter den Torus- oder Zylinder-Parametrisierungen. Sie können periodisch sein, aber auch dicht im Torus liegen.

Beispiel 4.2. Das Pendel auf einer Kugel im Schwerfeld wird durch ein vollständig integrables Vektorfeld beschrieben. Die Bahnen – Bilder von Geraden im Torus, manchmal periodisch, aber meistens dicht mit einer gewissen Regelmäßigkeit – kann man sich gut vorstellen, wenn man einen schweren Gegenstand an einem dünnen Faden anbindet und anstupst. Oder man sieht sich die Animation <http://www.ialms.net/sim/3d-pendulum-simulation/> an (am besten Show trajectory aktivieren).