Anhang zu Übung 9, Beispiel 4

Beispiel 4. Ein Punkt mit Masse 1 bewegt sich in der Ebene $\mathbb{R}^2$ und wird dabei vom Nullpunkt angezogen. Die Potentialfunktion hängt nur von der Entfernung zum Nullpunkt ab und läßt sich daher in Polarkoordinaten als $r \mapsto U(r)$ mit $U : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ stetig schreiben. Daraus ergibt sich für die Bewegung die Lagrange-Funktion

$$L(r, \dot{r}, \phi, \dot{\phi}) = \frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2 \dot{\phi}^2}{2} - U(r).$$

Es sei $(R, \Phi) : \mathbb{R} \to [0, \infty) \times \mathbb{R}$ eine Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung (also eine mögliche Bahn des Punktes).
Man berechne eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion R.

Lösung. Mit der Euler-Lagrange-Gleichung $\partial_{\phi}(L)(\dots) = C_1$ läßt sich Φ' durch R ausdrücken:

$$\Phi'(t) = \frac{C_1}{R(t)^2}, \tag{1}$$

für alle t mit $t \neq 0$. (Der Fall $R = 0$ ist eine singulärer Punkt im System der Polarkoordinaten; was passiert, wenn sich das System in diesen Punkt hineinbewegt, läßt sich nicht leicht voraussagen.) Einsetzen in die Energie-Erhaltungsgleichung ergibt

$$R'(t)^2 = 2C_2 - 2U(R(t)) - \frac{C_1^2}{R(t)^2} =: V(R(t)). \tag{2}$$

Qualitatives Verhalten. Wenn der Anfangswert von R zwischen zwei einfachen Nullstellen von V liegt, dann ist R eine periodische Funktion, die zwischen den beiden Nullstellen hin und her pendelt. Auch die Funktion Φ' ist periodisch wegen Gleichung (1). Die Situation ist analog wie beim Kugelpendel (VO vom 17.1.2017).
Wenn der Anfangswert grösser als die grösste Nullstelle R_0 ist, gibt es zwei Möglichkeiten: entweder $R'(0)$ ist positiv, dann ist R streng monoton wachsend für $t > 0$. Oder $R'(0)$ ist negativ, dann sinkt R bis auf R_0, dieser Wert wird in endlicher Zeit erreicht und danach ist R' positiv und R monoton wachsend.
Wenn der Fall kleiner als die kleinste Nullstelle ist, und die Ableitung $R'(0)$ negativ ist, dann fällt die Bahn in das “schwarze Loch” im Nullpunkt, an dem sich ja eine Singularität befindet. Ist die Ableitung $R'(0)$ hingegen positiv, hat das Masseteilchen noch Zeit, zur kleinsten Nullstelle in endlicher Zeit zu gelangen, dort umzukehren und dann ins schwarze Loch zu stürzen.
Wenn V gar keine Nullstellen hat, dann geht R entweder gegen ∞ oder fällt ins schwarze Loch.

Planetenbahnen. Ein Planet, der von einer Sonne im Nullpunkt angezogen wird, hat nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz das Potential $U(r) = C_3/r$ (C_3 ist negativ; bei abstoßender Kraft, etwa gleiche elektische Ladungen, wäre C_3 positiv). Wir wollen zeigen, daß dann für die Periode T_0 von Φ' und R gilt: $\Phi(t + T_0) - \Phi(t)$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, für alle t. Das bedeutet, daß sich der Planet immer dieselbe geschlossene Bahn durchläuft.
Wegen Gleichung (1) ist Φ streng monoton ohne waagrechte Asymptoten und daher bijektiv. Wir definieren $F = R \circ \Phi^{-1}$. Dann gilt

$$R(t) = F(\Phi(t)),\ R'(t) = F'(\Phi(t))\Phi'(t) = \frac{C_1 F'(\Phi(t))}{F(\Phi(t))^2}.$$

Das setzen wir in die Gleichung (2) ein und erhalten eine Differentialgleichung für F:

$$\frac{C_1^2 F'(\varphi)^2}{F(\varphi)^4} = 2C_2 - \frac{2C_3}{F(\varphi)} - \frac{C_1^2}{F(\varphi)^2},$$

oder nach Multiplizieren mit dem Nenner und dem Einführen neuer Konstanten $C_4 = \frac{2C_2}{C_1^2}$ und $C_5 = \frac{-2C_3}{C_1^2}$

$$F'(\varphi)^2 = C_4 F(\varphi)^4 + C_5 F(\varphi)^3 - F(\varphi)^2. \tag{3}$$

Diese Gleichung könnte man schon mit der Methode der Trennung der Variablen lösen - und dann müßten wir noch zeigen, die Perdiode von F ein Vielfaches von 2π ist (wir wissen schon dass F periodisch ist). Das Integral ist aber immer noch reichlich kompliziert.
Wenn man das Ergebnis schon kennt, nämlich die Gleichung der Ellipse in Polarkoordinaten

$$F(\varphi) = \frac{C_6}{\cos(\varphi + C_7) + C_8},$$

dann ist es ein wenig einfacher. Durch Einsetzen und Vergleich der Koeffizienten reduziert die Gleichung (3) auf

$$C_6^2(C_5^2 - 4C_4) = 4, \; C_8 = \frac{-C_5 C_6}{2}.$$

Wenn $C_5^2 - 4C_4 > 0$ ist, kann man C_6 und C_8 leicht bestimmen, C_7 ergibt sich aus einem Anfangswert.