Übung 10 (19.1.2016)

Beispiel 1. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 1$. Man verwende die Identität

$$\cos(2\alpha) = 2\cos(\alpha)^2 - 1,$$

um einen geschlossenen Ausdruck für $g^n(x)$ zu berechnen.

Beispiel 2. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x^2 - 1$ wie in Beispiel 1. Man zeige, daß für jede offene Teilmenge $U \subset [-1, 1]$ ein n existiert, sodass das Bild von U unter $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n mal) gleich dem Intervall $[-1, 1]$ ist.

Beispiel 3. Man beweise die folgende Behauptung:
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Es sei (x_1, x_2) ein Zweierzykel von f, d.h. $f(x_1) = x_2$ und $f(x_2) = x_1$. Es sei $g := f^2 = f \circ f$. Dann gilt $g'(x_1) = g'(x_2)$.
Gilt auch eine analoge Behauptung für k-Zykel mit $k > 2$?

Beispiel 4. Man untersuche mit dem Programm `http://www.falstad.com/vector/` das Richtungsfeld

$$F(x, y) = (y + 3sin(2x)/2, -x).$$

Suchen Sie Grenzzyklen, indem Sie die Regler `Field Strength` und `Number of Particles` nach rechts schieben. Kehren Sie mit der Schaltfläche `Reverse` das Vorzeichen um. Was können Sie beobachten?