Übung 9 (12.1.2016)

Beispiel 1. Es sei F das Richtungsfeld $F(x, y) = (-x + y^2, -y + x^2)$ mit asymptotisch stabilem Gleichgewichtspunkt $(0, 0)$. Man bestimme man eine Umgebung U von $(0, 0)$, sodaß die Richtungsableitung der Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ auf $U \setminus \{(0, 0)\}$ negativ ist.
Man finde Umgebungen von $(0, 0)$, die von den Lösungskurven nicht mehr verlassen werden, und bei denen alle Lösungskurven mit Startwert innerhalb der Umgebung gegen $(0, 0)$ konvergieren.

Beispiel 2. Man berechne die Gleichgewichtspunkte und den Typ (Klasse bezüglich topologischer Äquivalenz) aller hyperbolischen Gleichgewichtspunkte der Richtungsfelder

$$F(x, y) = (x^2 + y^2 - 1, xy),$$

$$G(x, y) = (\sin(x), \sin(y)).$$

Beispiel 3. Man gebe ein stetig parametrisiertes Richtungsfeld

$$\mathcal{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ (\lambda, x, y) \mapsto F_\lambda(x, y)$$

an, sodaß $F_0 = (x, y^2)$ ist und F_λ für $\lambda \neq 0$ keine Gleichgewichtspunkte hat.
(Damit ist gezeigt, daß der Gleichgewichtspunkt bei $(0, 0)$ von F_0 nicht strukturell stabil ist.)

Beispiel 4. Man wähle $\lambda \in (3, 1 + \sqrt{5})$. Es sei $F_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \to \lambda x(1 - x)$. Man zeige (für das gewählte λ) daß die Rekursion $x_{n+1} = F_\lambda(x_n)$ genau einen 2-Zyklus besitzt, und daß dieser asymptotisch stabil ist.