Übung 7 (7.12.2015)

Beispiel 1. Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^{\frac{1}{2}}$. Man berechne alle Lösungen der Differentialgleichung für $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$

$$\forall x : y'(x) = F(y(x))$$

mit Startwert $y(0) = -1, 0, 1$.

Beispiel 2. Es sei F die differenzierbare Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2|x|^{\frac{3}{2}}$. Man schreibe ein Programm zur näherungsweisen Berechnung der Lösung des Anfangswertproblems für $y : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$\forall x : y'(x) = F(y(x)),\ y(0) = 1,$$

mit dem Eulerschen Polygonzugsverfahren.
Welcher Wert von $y(1)$ ergibt sich für $N = 10, 20, 50, 100, 1000$, wobei N die Anzahl der Teilintervalle ist?

Beispiel 3. Man zeige oder widerlege:
Es sei $n > 0$. Es sei $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $F(\lambda, y) = F_\lambda(y)$ ein stetig differenzierbares parameterabhängiges Richtungsfeld, sodaß für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion $F_\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig ist. Es sei $y_0 \in \mathbb{R}^n$ fix. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ sei $Y_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ die Lösung des Anfangswertproblems für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

$$\forall x : y'(x) = F_\lambda(y(x)),\ y(0) = y_0.$$

Dann ist die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\lambda \to \lim_{x\to\infty} Y_\lambda(x)$ stetig.

Beispiel 4. Welche der folgenden Funktionen $F_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $n = 1, \ldots, 4$ erfüllen eine Lipschitzbedingung? Man gebe in diesen Fällen jeweils eine Lipschitz-Konstante an.

$$F_1(x, y) = \sin(x + y), F_2(x, y) = x^2 y + y - 1, F_3(x, y) = |x + y|, F_4(x, y) = xy$$