Übung 6 (24.11.2015)

Beispiel 1. Es seien $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ Diagonalmatrizen mit negativen Eigenwerten. Man finde eine topologische Equivalenz der beiden Systeme $y' = A_1 y$ für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und $z' = A_2 z$ für $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.
Hinweis: Der Ansatz

$$(y_1, y_2) \mapsto (z_1, z_2) = (sign(y_1)|y_1|^{c_1}, sign(y_2)|y_2|^{c_2})$$

mit geeigneten Konstanten $c_1, c_2 > 0$ führt zum Ziel. Dabei ist $sign$ die Funktion, die jeder reellen Zahl ihr Vorzeichen zuordnet.

Beispiel 2. Es sei $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Man zeige, daß die Abbildung $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$

$$(r\cos(\phi), r\sin(\phi)) \mapsto (r\cos(\phi + f(r)), r\sin(\phi + f(r))) \text{ für } r \neq 0, (0,0) \mapsto (0,0)$$

ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ ist.

Beispiel 3. Man berechne eine allgemeine Formel für die Folge von Funktionen $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\forall x : f_0(x) = 1,\ \forall n : f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)dt.$$

Konvergiert die Folge $(f_n)_n$? Wenn ja, was genau heißt das?

Beispiel 4. Ist das Anfangswertproblem für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\forall x : y'(x) = y(x)^2,\ y(0) = 1$$

eindeutig lösbar?