Übung 2 (27.10.2015)

Beispiel 1. [In dieser Übung soll die allgemeine Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten hergeleitet werden, deren charakteristisches Polynom nur eine Nullstelle hat.] Es sei $\mathcal{D}_c$ die Menge der Differentialoperatoren von $C^\infty(\mathbb{R})$ nach $C^\infty(\mathbb{R})$. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Es sei $T \in \mathcal{D}_c$ ein Operator der Ordnung n mit führendem Koeffizienten (der Koeffizient vor der n-ten Ableitung) gleich 1.
a) Man zeige, daß ein Operator $S \in \mathcal{D}_c$ von der Form $y \to y' - \lambda y$ mit Konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ existiert, sodaß

$$T = S \circ S \circ \cdots \circ S$$

(n-malige Hintereinanderausführung von S) ist.
b) Man stelle das System von Differentialgleichungen für $y_1, \ldots, y_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$S(y_1) = y_2,\ S(y_2) = y_3, \ldots, S(y_{n-1} = y_n, S(y_n) = 0$$

in vektorieller Form dar.
c) Man bestimme die allgemeine Lösung von b) mit der Exponentialmatrix.

Beispiel 2. Es sei $n \geq 2$. Man beweise oder widerlege die Behauptung

$$\forall A, B \in \mathbb{C}^{n\times n} :\ e^{A+B} = e^A e^B \implies AB = BA.$$

Beispiel 3. Man berechne einen geschlossene Formel für die Folge $(x_n)_n$ definiert durch

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+3} = 7x_{n+1} - 6x_n,\ x_0 = 1,\ x_1 = 2.$$

Hinweis: die Nullstellen des charakteristischen Polynom sind ganze Zahlen mit Absolutbetrag kleiner oder gleich 3.

Beispiel 4. Man berechne die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\forall x : y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$