Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

10. Dezember 2013

Übung 8

1. Finden Sie zwei Polynome $f_1(x, y)$ und $f_2(x, y)$ mit nur Termen vom Grad 3 so, dass das Vektorfeld $F(x, y) = (-y + f_1(x, y), x + f_2(x, y))$ bei $(0, 0)$ eine Quelle hat, und konstruieren Sie eine entsprechende Ljapunov-Funktion dazu.

2. Sei das parametrisierte Richtungsfeld $f_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$F_\lambda(x) = \lambda\, x - x^3.$$

   Dann besitzt F_0 einen nichthyperbolischen Gleichgewichtspunkt bei $x = 0$.

   (a) Skizzieren Sie die Phasenbilder für $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ und $\lambda > 0$.

   (b) Skizzieren Sie das Bifurkationsdiagramm in der (λ, x)-Ebene mit den Equilibria von F_λ.

3. Sei $F \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein differenzierbares Richtungsfeld, sodass der Fluss

$$\phi \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto \phi(t, x)$$

   für alle $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ definiert ist. Zeigen Sie, dass für alle t die Funktion $\phi_t(x) \colon x \mapsto \phi(t, x)$ streng monoton steigend ist.

4. Sei die parametrisierte Funktion $f_\lambda \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f_\lambda(x) = x - x^3 + \lambda\, x.$$

   (a) Skizzieren die Phasenbilder des diskreten dynamischen Systems $x_{n+1} = f_\lambda(x_n)$ mit $n = 0, 1, \ldots$ für $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ und $\lambda > 0$ in der Nähe von $x = 0$.

   (b) Skizzieren Sie das zugehörige Bifurkationsdiagramm.