Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

12. November 2013

Übung 5

1. Welche der folgenden Funktionen ist Lipschitz-stetig? Man gebe für diese eine Lipschitz-Konstante an.

   (a) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(x^2)$

   (b) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sin(|x|)$

   (c) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |\sin(x)|$

   (d) $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \arctan(x)$

   (e) $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$

2. Sei $D = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $F\colon D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $x_0 \in D$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Sei $B\colon C^0(D) \to C^0(D)$ der lineare Operator definiert durch

   $$B(f)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, f(t))\,\mathrm{d}t.$$

   Zeigen Sie, dass ein Fixpunkt $y\colon D \mapsto \mathbb{R}$ von B das Anfangswertproblem

   $$y'(x) = F(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0$$

   löst.

3. Sei $F\colon [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 1$. Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen der Anfangswertprobleme

   $$y_1'(x) = F(x, y_1(x)), \quad y_1(0) = w_1$$

   bzw.

   $$y_2'(x) = F(x, y_2(x)), \quad y_2(0) = w_2.$$

   In der Vorlesung wurde die Abschätzung

   $$\|y_1 - y_2\| \leq 4\,|w_1 - w_2|$$

   gezeigt. Finden Sie eine Abschätzung mit einer Konstanten kleiner als 4.