Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

5. November 2013

Übung 4

1. Berechnen Sie eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung
$$y''(x) + 5y'(x) + 4y(x) = 3 - 2x$$
mittels Variation der Konstanten und geben Sie die allgemeine Lösung an.

2. (a) Rechnen Sie nach, dass x^3 und x^5 Lösungen der linearen Differentialgleichung
$$x^2\, y''(x) - 7x\, y'(x) + 15\, y(x) = 0$$
sind.

   (b) Berechnen Sie eine partikuläre Lösung von
$$y''(x) - \frac{7}{x}\, y'(x) + \frac{15}{x^2}\, y(x) = x$$
indem Sie verwenden, dass die Methode der Variation der Konstanten auch für lineare Differentialgleichungen mit variablen Koeffizienten funktioniert.

3. (a) Berechnen Sie die Potenzreihe der Lösung der Differentialgleichung
$$(1 - x^2)\, y'' - x\, y' = 2$$
mit $y(0) = y'(0) = 0$ mit dem Ansatz $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\, x^k$.

   (b) Zeigen Sie, dass $y(x) = (\arcsin x)^2$ gilt.

4. Sei (c, d) ein reelles Intervall und $a\colon (c, d) \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $x_0 \in (c, d)$ und
$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt.$$

   (a) Zeigen Sie direkt, dass alle Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung
$$y'(x) = a(x)y(x)$$
von der Form $y(x) = C\mathrm{e}^{A(x)}$ mit $C \in \mathbb{R}$ sind.

   (b) Sei $y_p(x)$ eine Lösungen der linearen inhomogenen Differentialgleichung
$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x).$$
Zeigen Sie, dass alle Lösungen von der Form $y_p(x) + C\mathrm{e}^{A(x)}$ mit $C \in \mathbb{R}$ sind und berechnen Sie eine partikuläre Lösung mit dem Ansatz $y_p(x) = C(x)\mathrm{e}^{A(x)}$.