

# Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

29. Oktober 2013

## Übung 3

1. Berechnen Sie die Jordansche Normalform  $J = T^{-1}AT$  und eine entsprechende Matrix  $T$  für die folgenden Matrizen:

(a)  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,

(b)  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$ ,

(c)  $A = \begin{pmatrix} 5/2 & 1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$ ,

(d)  $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

2. Lösen Sie die folgenden Systeme, und skizzieren Sie jeweils die Lösungskurven:

(a)  $x'_1 = 3x_1, \quad x'_2 = 2x_2$ ,

(b)  $x'_1 = -x_1 + 4x_2, \quad x'_2 = 2x_1 + x_2$ ,

(c)  $x'_1 = x_1 - 2x_2, \quad x'_2 = x_2$ .

3. Probieren Sie das Java-Applet <http://www.falstad.com/vector/> zur Visualisierung von Vektorfeldern aus. Mit dem Menüpunkt **Setup: user-defined field** können Sie beliebige Vektorfelder eingeben und mit **Floor: streamlines** werden die entsprechenden Lösungskurven angezeigt.

Finden Sie mindestens vier verschiedene Systeme von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit qualitativ unterschiedlichen Lösungskurven.

- 4.\* Sei die Folge  $(a_n)_{n \geq 1}$  definiert durch die Rekursion

$$a_n = 20/3 a_{n-1} - 11/3 a_{n-2} - 2 a_{n-3}$$

für  $n \geq 4$  mit Anfangswerten  $a_1 = 0$ ,  $a_2 = 3$ , und  $a_3 = 2$ .

- (a) Berechnen Sie einige Folgenglieder  $a_n$  für  $n = 4, 5, 6, \dots$  exakt in  $\mathbb{Q}$  und dann die Dezimaldarstellung von  $a_n$  bzw.  $a_n/a_{n-1}$ .
- (b) Berechnen Sie einige Folgenglieder  $a_n$  bzw.  $a_n/a_{n-1}$  für  $n = 4, 5, \dots, 15, 16, \dots$  numerisch. Was beobachten Sie?