Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

22. Oktober 2013

Übung 2

1. (a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

   $$P'(t) = \lambda P(t)(K - P(t)), \quad P(0) = P_0 > 0, \quad t \geq 0,$$

   für die Populationsgröße $P(t)$ mit Trägerkapazität $K > 0$ und $\lambda > 0$.

   (b) Berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} P(t)$.

   (c) Diskutieren Sie das Verhalten von $P(t)$ für die Fälle $P_0 < K$, $P_0 = K$ und $P_0 > K$.

2. Berechnen Sie eine Basis des Lösungsraums der folgenden Differentialgleichungen:

   (a) $y'' - 3\,y' + 2y = 0$,

   (b) $y'' - 4\,y' + 4\,y = 0$,

   (c) $y'' + 4\,y' + 2\,y = 0$,

   (d) $y^{(7)} - y^{(5)} = 0$.

3. Sei F_1 der lineare Differentialoperator $f \mapsto f'' + f$ und F_2 der Differentialoperator $f \mapsto f'' + f' + 1/2\,f$.

   (a) Berechnen Sie eine Basis von reellen Lösungen der Differentialgleichungen $F_2(y) = 0$ bzw. $F_1(F_2(y)) = 0$.

   (b) Berechnen Sie die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

   $$y'' + y' + 1/2\,y = \sin(x),$$

   indem Sie den Differentialoperator F_1 anwenden und dann eine entsprechende Linearkombination von Lösungen der homogenen Gleichung bestimmen.

4. Sei F_1 der lineare Differentialoperator $f \mapsto f''' + 2\,f'' + f' + f$ und F_2 der Operator $f \mapsto f'' + f' + f$. Zeigen Sie, dass sich jede Lösung der Differentialgleichung

   $$F_1(F_2(y)) = y^{(5)} + 3\,y^{(4)} + 4\,y''' + 4\,y'' + 2\,y' + y = 0$$

   eindeutig darstellen lässt als Summe $y = y_1 + y_2$ mit $F_1(y_1) = 0$ und $F_2(y_2) = 0$.