Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

21. Jänner 2014

Übung 11

1. Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= \sin(x) + \sin(y) \\ y' &= -\sin(y) + \sin(x). \end{aligned}$$

   (a) Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte und deren Typ.

   (b) Visualisieren Sie die Lösungen mit dem Java-Applet `vector`.
   Gibt es Sattelverbindungen?

   (c) Ist das asymptotische Verhalten der Lösungskurven stabil unter kleinen Störungen?

2. Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x' &= 2\,xy + \lambda \\ y' &= 9 - x^2 - y^2 \end{aligned}$$

   für $\lambda \in \mathbb{R}$.

   (a) Berechnen Sie die Gleichgewichtspunkte und deren Typ für $\lambda = 0$

   (b) Zeigen Sie, dass es für $\lambda = 0$ eine Sattelverbindung gibt.

   (c) Visualisieren Sie die Lösungen für kleine λ mit dem Java-Applet `vector`.
   Bleibt die Sattelverbindung erhalten?

3. Beweisen Sie folgende Behauptung: Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Wenn für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $h(a) = h(b) = 0$ gilt

$$\int_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

   dann ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$. *Hinweis: indirekt.*

4. Berechnen und lösen Sie die Euler-Lagrange-Gleichung für das Variationsproblem mit dem Funktional $I(f) = \int_a^b L(f(x), f'(x))\,\mathrm{d}x$ mit $L(y, z) = y + z^2$.