Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

15. Oktober 2013

Übung 1

1. Löse folgende Differentialgleichungen/Anfangswertprobleme mit der Methode der Trennung der Variablen:

   (a) $y'(x) = 10 - y(x), \;\; y(0) = 1,$

   (b) $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}, \;\; y(1) = 2,$

   (c) $y'(x) = \mathrm{e}^{y} \sin(x),$

   (d) $y'(x) = \frac{y(x)}{x^2}.$

2. Die folgenden beiden Beispiele sind "Euler-homogene" Differentialgleichungen. Der Ansatz $y(x) = xz(x)$ führt auf eine Gleichung, die Sie dann mit der Methode der Trennung der Variablen lösen sollen.

   (a) $y'(x) = \frac{y(x)}{x} - \frac{y(x)^2}{x^2},$

   (b) $xy'(x) = y(x) - x - x\,\mathrm{e}^{-y(x)/x}.$

3. Die Fibonacci-Folge $F_0, F_1, F_2, \ldots$ ist durch die Rekursion

   $$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \tag{1}$$

   für $n \geq 2$ mit Anfangswerten $F_0 = 0, F_1 = 1$ definiert.

   (a) Bestimmen Sie die Matrix M mit

   $$\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ F_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad \text{für } n \geq 1.$$

   (b) Geben Sie eine explizite Formel für $(F_{n+1}, F_n)^T$ mit M und $(F_1, F_0)^T$ an.

   (c) Zeigen Sie damit, dass die erste Spalte von M^n gleich $(F_{n+1}, F_n)^T$ ist. Bestimmen Sie analog dazu die zweite Spalte von M^n, indem Sie die Rekursion (1) mit Anfangswerten $F_0 = 1, F_1 = 0$ betrachten.

   (d) Beweisen Sie mit der Formel für M^n die Identität $F_{n+1}\,F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n$ für $n \geq 1$.

4. Berechnen Sie eine Lösung der retardierten Differentialgleichung $f'(x) = f(x-1)$ von der Form $f(x) = \mathrm{e}^{c\,x}$, indem Sie eine Gleichung für die Konstante $c \in \mathbb{R}$ herleiten. Zeigen Sie, dass diese Gleichung eine eindeutige Lösung besitzt.