Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

28. November 2011

Übung 8

1. Sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $F(x,y) = (x^2 + y^2 - 1, xy)$.
   (a) Transformiere F in die Koordinaten $(u,v) = (x, y - x^2)$ (Umkehrung $(x,y) = (u, v + u^2)$).
   (b) Berechne die Equilibrien von F und gebe jeweils an, ob es sich um eine Quelle, eine Senke, oder um einen Sattelpunkt handelt.
2. (a) Berechne die Equilibrien des Vektorfeldes $(x,y) \mapsto (-3x^2 + y^2, 2xy)$. Zeichne das System mit dem Program `vector` und schätze die Einzugsmenge und Auszugsmenge.
   (b) Beweise die Schätzung der Einzugs- und Auszugsmenge durch Transformation in Polarkoordinaten.
3. (a) Untersuche das Vektorfeld $(x,y) \mapsto (-\sin(x+y), \sin(x-y))$ in der Nähe des Equilibriums $(0,0)$. Handelt es sich um eine Senke? Falls ja, gib eine Ljapunov-Funktion an, d.h. eine Funktion die bei $(0,0)$ verschwindet und in einer Umgebung U von $(0,0)$ positiv ist, und deren Richtungsableitung auf $U \setminus \{(0,0)\}$ negativ ist.
   (b) Ermittle das Einzugsgebiet graphisch mit `vector`.
4. Seien
$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ und } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$
   (a) Für $l \in \{1, \dots, n\}$ berechne $\frac{\partial}{\partial x_l}\left(x^T A^T A x\right)$.
   (b) Berechne $\sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial x_l}\left(x^T A^T A x\right)$.
   (c) Folgere: Wenn A ein lineares Richtungsfeld definiert und alle Eigenwerte von A einen positiven Realteil haben, dann existiert eine positiv definite Matrix Q (d.h. $x^T Q x > 0$ für alle $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$), so dass die Richtungsableitung der Abbildung $x \mapsto x^T Q x$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ positiv ist.