

# Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

21. November 2011

## Übung 7

1. Sei  $D \subset \mathbb{R}$  ein Intervall,  $x_0, x_1 \in D$ ,  $F : D \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und Lipschitz mit Lipschitzkonstante  $L \in \mathbb{R}_+$ ,  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ . Es seien  $y_1$  bzw.  $y_2 : D \rightarrow \mathbb{R}$  die Lösung des Anfangswertproblems  $y'(t) = L(t, y(t))$  mit  $y(x_0) = z_1$  bzw.  $y(x_0) = z_2$ .
  - (a) In der Vorlesung wurde gezeigt, daß  $|y_1(x_1) - y_2(x_1)| \leq \frac{27}{8}|z_1 - z_2|$  gilt, falls  $L|x_1 - x_0| = 1$  ist. Verbessere die Schranke durch geeignete Unterteilung des Intervalls.
  - (b) Sei nun  $L|x_1 - x_0| = C > 1$ . Was ist der Grenzwert der Abschätzung bei immer feinerer Unterteilung des Intervalls?
2. Führe die Schwingungsgleichung

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) - f(t) = 0$$

mit  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gesucht,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig gegeben,  $a, b \in \mathbb{R}$  gegeben, auf ein vektorielles System erster Ordnung zurück.

3. Welche der folgenden Funktionen  $F_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 1, \dots, 4$  erfüllen eine Lipschitzbedingung? Man gebe in diesen Fällen jeweils eine Lipschitz-Konstante an.

$$F_1(x, y) = \sin(x + y), F_2(x, y) = x^2y + y - 1, F_3(x, y) = |x + y|, F_4(x, y) = xy$$