

Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

14. November 2011

Übung 6

1. Sei $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ das Richtungsfeld $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, wobei A eine reelle 2×2 Matrix ist.
 - (a) Für welche Matrizen hat R Divergenz 0 (solche Richtungsfelder heißen quellenfrei)?
 - (b) Für welche Matrizen ist R ein Gradientenfeld? Man gebe eine Formel für die Potentialfunktion an.
2. Sei $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ das Richtungsfeld $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$, T eine invertierbare Matrix und $\tilde{R} : \vec{u} \mapsto T^{-1}AT\vec{u}$ das transformierte Vektorfeld.
 - (a) Falls R quellenfrei ist, ist dann \tilde{R} ebenfalls quellenfrei?
 - (b) Falls R ein Gradientenfeld ist, ist dann \tilde{R} ebenfalls ein Gradientenfeld?
3. Finde heraus, was die "Curl Detectors" im "Display" Menü des Programms vector Programm <http://www.falstad.com/vector/> anzeigen.
4. Berechne die Rotation des Vektorfelds $R : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$.
5. Zeige, dass die Lösungskurven des Vektorfelds aus 4. geschlossene Kurven sind.