Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

17. Oktober 2011

Übung 2

1. Löse
$$y'' + 3y' + 4y = 0,\ y'' + 4y' + 2y = 0,\ y'' + y' - 7y = 0$$

2. Diskutiere die Lösung des Anfangswertproblems
$$y'' + ay' + by = 0, y(0) = 0, y'(0) = c$$
für $a \geq 0$, $b > 0$, $c > 0$ (Pendel wird angestoßen). Insbesondere, was läßt sich über die positiven Nullstellen der Lösung sagen, und wie verhält sich die Funktion für $x \to \infty$.

3. Löse
   (a) $y' = \frac{2xy}{1+x^2}$
   (b) $\frac{y'}{2\cos(x^2)} = xy^2$.

4. Eine Feder mit der Federkonstanten $k = 700N/m$ ist an ihrem oberen Ende aufgehängt und befindet sich in vertikaler Lage. An ihrem unteren Ende wird eine Masse von $7kg$ angebracht. Nachdem sie wiederum Ruhelage eingenommen hat, zieht man die Masse um $0,05m$ nach unten und läßt sie los. Bestimme die resultierende Bewegung unter Vernachlässigung des Luftwiderstandes.

5. Ein Gewicht mit Masse $m = 1kg$ hängt an einer Feder mit Federkonstante $k = 4N/m$ im Gleichgewicht. Eine äußere Kraft $F(t) = (1 + t + \sin(2t))N$ beginnt ab dem Zeitpunkt $t = 0$ auf die Masse zu wirken. Unter der Annahme, dass keine äußere Dämpfung vorliegt:
   (a) Erkläre, warum $x_p(t) = a + bt + At\cos(2t) + Bt\sin(2t)$ als spezieller Ansatz für die Beschreibung der Schwingung gewählt werden kann.
   (b) Bestimme die resultierende Bewegung.
   (c) Wenn die Masse mindestens $(1/2 + \pi/4)m$ oder mehr aus ihrer Gleichgewichtslage verschoben wird, bricht die Feder. Berechne den Zeitpunkt, zu dem die Feder bricht.