

# Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

Besprechung am 31.1.2012

## Übung 11

1. Eine runde Trommel wird durch Schläge genau in der Mitte zum Schwingen gebracht. Der Grundton ist 440 Hertz, ein eingestrichenes  $a$ . Welche Obertöne können erzeugt werden?

- (a) Schritt 1: Man suche Basislösungen der zweidimensionalen Wellengleichung für kreisförmige Wellen

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} = u_{tt},$$

$u(0, t)$  beschränkt und  $u(R, t) = 0$  durch den Separationsansatz  $u(r, t) = f(r)g(t)$  und stelle für  $f$  ein Eigenwertproblem auf.

Siehe <http://www.risc.jku.at/people/jschicho/dg/material/index.html>.

- (b) Schritt 2: Man finde die Eigenwerte und Eigenlösungen, und konstruiere damit Basislösungen für die Wellengleichung. Für die numerische Lösung benutzen Sie ein Computeralgebra-System. Für jede Basislösungen soll die Frequenz bestimmt werden: die kleinste Frequenz wird mit 440 Hertz gleichgesetzt um  $R$  zu bestimmen und die anderen Frequenzen können dann ausgerechnet werden.
2. Wenn eine schwere Schnur an zwei Punkten aufgehängt wird, dann formt die Kurve den Graph einer cosh-Funktion. In dieser Übung soll das gezeigt werden.
    - (a) Schritt 1: Die Gestalt der Kurve ist so, daß bei festgelegter Bogenlänge der Schwerpunkt möglichst weit unten ist. Man stelle das Variationsproblem auf und berechne die Euler-Lagrange-Gleichungen.

Hinweis: die  $y$ -Koordinate der Bogenlänge hat eine ähnliche Formel wie die Mantelfläche eines Rotationskörpers. Zweiter Hinweis: man verwende ein Computer-Algebra-System zur Vereinfachung der Ausdrücke.
    - (b) Schritt 2: Man weise nach, daß  $y(x) = a + \frac{\cosh(bx+c)}{b}$  für beliebige  $b, c$  und geeignetes  $a$  die Gleichung erfüllen.