Gewöhnliche Differentialgleichungen und Dynamische Systeme

Besprechung am 24.1.2012

Übung 10

1. Entwickeln Sie die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) := \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$ in eine Fourier-Sinusreihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$.

2. Lösen Sie die Wärmeleitungsgleichung $u_t = u_{xx}$ mit der Randbedingung

   $$u(t,0) = u(t,1) = 0$$

   und der Anfangsbedingung

   $$u(0,x) = f(x) = \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}|$$

   (siehe Beispiel 1) mit der Methode von Fourier.

3. Wenn für eine Fourier-Reihe $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$ die Folge $(|a_n|)_n$ eine geometrische Majorante $(q^n)_n$ mit $q \in (0,1)$ besitzt, dann existieren alle Ableitungen von g und sie lassen sich formal durch Vertauschen der Summe mit den Ableitungen berechnen.

   Für welche $t \geq 0$ besitzt die Koeffizientenfolge (genauer die Folge der Absolutbeträge der Koeffizienten) der Temperaturverteilungsfunktion $x \mapsto u(x,t)$, u wie in Beispiel 2, eine solche geometrische Majorante?

4. Erstellen Sie mit einem Computeralgebrasystem eine Animation der Funktionsgraphen von

   $$f : [0,1] \to \mathbb{R},$$
   $$f(t) = c\sin(x) + \frac{c^9}{3}\sin(3x) - \frac{c^{25}}{5}\sin(5x) - \frac{c^{49}}{7}\sin(7x) + \frac{c^{81}}{9}\sin(9x) + \frac{c^{121}}{11}\sin(11x),$$

   wobei der Parameter c von 1 bis 0 gehen soll. (Für $c = e^{-\pi^2 t}$ stimmen die Graphen mit den Temperaturverteilungen der Wärmeleitungsgleichung überein.)