Kommutative Algebra
und Algebraische Geometrie

Josef Schicho, JKU, RISC

March 25, 2025

Überblick

1. Affine und Projektive Varietäten
2. Glattheit
3. Der Chow-Ring
4. Vektorbündel

Verwendete Literatur:

- D. Eisenbud and J. Harris: 3264 and all that. Springer 2016.
- wikipedia

Die Projektive Ebene

In der euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ gibt es Geraden, die einander schneiden, und Geraden, die einander nicht schneiden. Kepler dachte sich eine Erweiterung der Ebene aus, in der zwei verschiedene Geraden einander immer schneiden, und in der durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade durchgeht.

Zusätzlich zu den bekannten Punkten im $\mathbb{R}^2$ setzen wir "unendlich ferne Punkte". Jeder unendlich ferne Punkt ist eine Equivalenzklasse von Geraden bezüglich der Parallel-Relation: zwei Geraden sind equivalent genau dann wenn sie parallel sind. Außerdem setzen wir noch eine "unendlich ferne Gerade", die aus allen unendlich fernen Punkten besteht.

Mittels Fallunterscheidungen können wir die obigen Behauptungen nun zeigen: zwei Geraden schneiden in genau einem Punkt, zwei Punkte bestimmen genau eine Gerade.

Algebraische Konstruktion

Wir definieren auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ die folgende Equivalenz-Relation:

$$v_1 \sim v_2 :\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^* : \lambda v_1 = v_2$$

Die Punkte der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2$ sind definiert als die Equivalenzklassen von Vektoren.

Die Equivalenzklasse von (x, y, z) wird mit $(x : y : z)$ bezeichnet (homogene Koordinaten).

Die Geraden im $\mathbb{P}^2$ ensprechen zwei-dimensionalen Teilräumen des $\mathbb{R}^3$. Jede Gerade ist durch eine lineare Gleichung $ax + by + cz = 0$ gegeben.

Wie hängen die beiden Konstruktionen zusammen?

Bijektion zwischen Kepler-Konstruktion und algebraischer Konstruktion:

- Jeder Punkt $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ entspricht dem Punkt $(u : v : 1)$.
- Der unendlich ferne Punkt auf parallelen Geraden mit Richtungsvektor (x, y) entspricht dem Punkt mit homogenen Koordinaten $(x : y : 0)$;
- Wenn $(a, b) \neq (0, 0)$ ist, dann entspricht die Gerade mit Gleichung $au + bv + c = 1$ dem zweidimensionalen Teilraum mit der Gleichung $ax + by + cz = 0$.
- Die unendlich ferne Gerade entspricht dem Teilraum mit der Gleichung $z = 0$.

Kurven in der Projektiven Ebene

Ein Polynom $F \in \mathbb{R}[x, y, z]$ heißt homogen von Grad k, wenn für alle $x, y, z, \lambda \in \mathbb{R}$ die Gleichung $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^d F(x, y, z)$ erfüllt ist. Homogene Polynome lassen sich zwar nicht auswerten auf Punkten in $\mathbb{P}^2$, aber es ist wohldefiniert, ob ein homogenes Polynom bei diesem Punkt Null ist oder nicht.

Projektive Kurven im $\mathbb{P}^2$ sind Nullstellen von homogenen Polynomen. Die Kurven von Grad 1 sind genau die Geraden, die Kurven von Grad 2 sind Kegelschnitte.

Der Satz von Bezout

Satz: Es seien C_1 und C_2 verschiedene Kurven von Grad k_1 bzw. k_2. Dann schneiden die Kurven einander in $k_1 k_2$ Punkten.

Der Satz stimmt so nicht, aber man kann ihn “reparieren”:

- Wir ersetzen $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$.
- Schnittpunkte zählen wir mit Vielfachheit: sind die Tangenten an beide Kurven beim Schnittpunkt verschieden, dann ist die Vielfachheit 1; sonst größer als 1. Eine genaue Definition kommt später.
- Wir dürfen auch nicht vergessen, die unendlich fernen Schnittpunkte mitzuzählen.

Höhere Dimension

Es sei $d \in \mathbb{N}$. Wir definieren auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ die folgende Equivalenzrelation:

$$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^* : v_2 = \lambda v_1.$$

Der projektive Raum $\mathbb{P}^d$ ist definiert als die Menge der Equivalenzklassen.

Hyperflächen sind definiert als Nullstellenmengen von homogenen Polynomen.

Es gibt eine höherdimensionale Version von Bezout. Diese wird später behandelt.

Der Affine Raum

Sei $n \in \mathbb{N}$. Der affine Raum $\mathbb{A}^n$ ist der Vektorraum $\mathbb{C}^n$; "affin" bedeutet, dass man teilweise die algebraischen Struktur eines Vektorraums abstrahiert. Wir wollen "vergessen", wo der Nullpunkt ist, und dass man Punkte addieren kann. Der affine Raum ist "homogen" in dem Sinn, dass es keine ausgezeichneten Punkte gibt. Aber wir wollen immer noch den Mittelpunkt zweier Punkte bestimmen können.

Affine Algebraische Mengen

Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{A}^n$ heißt *algebraisch*, wenn sie die Menge der gemeinsamen Nullstellen einer Menge G von Polynomen in $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ ist.

Beispiele von algebraischen Mengen sind lineare Unterräume, Quadriken, endliche Mengen, die leere Menge, oder $\mathbb{A}^n$ selbst.

Frage: Man zeige, dass beliebige Durchschnitte und endliche Vereinigungen von algebraischen Mengen wieder algebraisch sind.

Topologien

Es sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Menge $\mathcal{T}$ von Teilmengen von X, die folgende Eigenschaften erfüllt:

- Der Durchschnitt zweier Mengen in $\mathcal{T}$ ist in $\mathcal{T}$.
- Die Vereinigung von beliebig vielen Mengen in $\mathcal{T}$ ist in $\mathcal{T}$.
- X und $\emptyset$ sind in $\mathcal{T}$.

Die Mengen in $\mathcal{T}$ nennen wir *offen*, und die Komplemente von Mengen in $\mathcal{T}$ nennen wir abgeschlossen.

Beispiele:

1. Offene Mengen in einem metrischen Raum (metrische Topologie).
2. $\mathcal{T}_d = 2^X$ (Potenzmenge), $\mathcal{T}_i = \{\emptyset, X\}$.
3. $\mathcal{T}_c$ (ko-endliche Topologie), die Menge aller Komplemente von endlichen Mengen plus $\emptyset$.

Die Zariski-Topologie

$\mathbb{C}^n$ ist ein metrischer Raum und besitzt als solcher eine Topologie. Eine zweite Topologie – die Zariski-Topologie – definieren wir, indem wir festlegen, wann eine Teilmenge offen ist: genau dann, wenn ihr Komplement algebraisch ist.

Beispiel: Im Fall $n = 1$ ist jede algebraische Menge entweder $\mathbb{A}^1$ selbst oder endlich. Die Zariski-Topologie stimmt hier überein mit der ko-endlichen Topologie.

Die Zariski-Topologie ist *gröber* als die metrische Topologie: jede Menge, die in der Zariski-Topologie offen ist, ist auch in der metrischen Topologie offen.

Stetigkeit

Es seien $(X, \mathcal{T})$ und $(Y, \mathcal{U})$ topologische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge eine offene Menge ist.

Das ist equivalent zur Aussage: das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.

Ein n-tupel von Polynomen $(f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]^n$ definiert eine Abbildung $f : \mathbb{A}^m \to \mathbb{A}^n$. Eine Abbildung, die durch Polynome definiert werden kann, nennen wir regulär.

Offensichtlich ist sind reguläre Abbildungen stetig bezüglich der metrischen Topologie.

Frage: Man zeige, dass jede reguläre Abbildung stetig bezüglich der Zariski-Topologie ist.

Varietäten

Eine algebraische Menge heißt *irreduzibel* oder *Varietät*, wenn sie keine Vereinigung von zwei echten algebraischen Teilmengen ist. Wenn X eine algebraische Menge ist, dann nennen wir die maximale Teilvarietäten von X seine "irreduziblen Komponenten".

Lemma 1: Jede absteigende Kette von algebraischen Mengen $X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq X_3 \ldots$ bricht ab.

In `https://en.wikipedia.org/wiki/Hilberts_basis_theorem` werden mehrere Beweise angegeben.

Theorem 1: Jede algebraische Menge ist die endliche Vereinigung ihrer irreduziblen Komponenten.

Beweis des Theorems

Es sei X eine algebraische Menge. Wir zeigen zunächst, dass X die Vereinigung von irreduziblen Teilmengen ist.
Wenn X irreduzibel ist, dann ist die Behauptung richtig. Wenn nicht, können wir X zerlegen in zwei echte algebraische Teilmengen. Jede dieser Teilmengen ist entweder irreduzibel oder kann weiter zerlegt werden. Nach Lemma 1 sind für jede Teilmenge nur endlich viele Zerlegungsschritte möglich. Also muss der Zerlegungsprozess abbrechen und die Behauptung ist bewiesen: $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k$ mit $X_1, \ldots, X_k$ irreduzibel.

In einem zweiten Schritt streichen wir alle X_i, die schon echte Teilmengen von X_j sind – diese tragen nichts zur Vereinigung bei.

Fortsetzung Beweis

Drittens behaupten wir nun, dass die X_j, die den zweiten Schritt überstanden haben, maximal irreduzibel sind. Nehmen wir an X_1 hat überlebt, und $X_1 \subsetneq Y \subseteq X$ für ein irreduzibles Y. Dann gilt

$$Y = (X_1 \cap Y) \cup (X_2 \cap Y) \cup \cdots \cup (X_k \cap Y).$$

Da Y irreduzibel ist, gilt $X_i \cap Y = Y$ für mindestens ein i. Dieses i kann nicht 1 sein, weil $X_1 \subsetneq Y$ gilt. Also $X_i \cap Y = Y$ für ein $i > 1$. Daraus folgt $Y \subseteq X_i$ und daher $X_1 \subseteq X_i$, und X_1 dürfte dann eigentlich nicht überlebt haben.

Ideale

Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine Menge und $R := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Die Menge $I(X)$ der Polynome $F \in R$, die auf ganz X verschwinden, ist ein Ideal, das *Verschwindungsideal* von X.

Beispiel: Das Verschwindungsideal des Einheitskreises $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{A}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}$ ist $\langle x_1^2 + x_2^2 - 1 \rangle_R$.

Es sei $I \subseteq R$ ein Ideal. Die algebraische Menge $Z(I)$ der gemeinsamen Nullstellen aller Polynome in I heißt *Nullstellenmenge* von I.

Beispiel: Die Nullstellenmenge von $\langle x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3 \rangle_R$ ist die Vereinigung der drei Koordinatenachsen.

Ideale

Theorem 2:

1. $I_1 \subseteq I_2 \implies Z(I_1) \supseteq Z(I_2)$
2. $X_1 \subseteq X_2 \implies I(X_1) \supseteq I(X_2)$
3. $Z(I(X))$ ist der Abschluss von X in der Zariski-Topologie
4. $I(Z(I))$ ist das Radikalideal $\sqrt{I} = \{a \in R \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$
5. X ist Varietät genau dann wenn $I(X)$ ein Primideal ist.

Übung 2: Man zeige die Teile 1,2,3,5 in der Zariski-Topologie.

Teil 4 ist eine von mehreren Formulierungen von `https://en.wikipedia.org/wiki/Hilbert's_Nullstellensatz`. Auf der verlinkten Beweise sind drei Beweise angegeben; keiner der drei ist einfach.

Mehr über Ideale

Theorem 3:

1. Es seien $I_1, I_2 \in R$. Dann ist

$$Z(I_1 + I_2) = Z(I_1) \cap Z(I_2)$$

   und

$$Z(I_1 \cdot I_2) = Z(I_1 \cap I_2) = Z(I_1) \cup Z(I_2).$$

2. Es seien $X_1, X_2 \in \mathbb{A}^n$. Dann ist

$$I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2) = \sqrt{I(X_1) \cdot I(X_2)}$$

   und

$$I(X_1 \cap X_2) = \sqrt{I(X_1) + I(X_2)}.$$

Frage: Man beweise einige Teile von Theorem 3.

Ideale und Projektionen

Es sei $m < n$ und $p : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^m$ die Projektion
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$.
Es sei $R_m \subset R$ der Teilring $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$.

Theorem 4: Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ und $Y \subset \mathbb{A}^m$. Dann ist

$$I(p(X)) = I(X) \cap R_m$$

und

$$I(p^{-1}(Y)) = \langle I(Y) \rangle_R.$$

Frage: Man beweise Teile von Theorem 4.

Der Funktionenring

Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine algebraische Menge. Der Funktionenring $\mathbb{C}[X]$ ist definiert als der Ring aller regulären Funktionen von X nach $\mathbb{C}$, also aller Funktionen, die als Polynome dargestellt werden können (in der Regeln nicht eindeutig).

Wir haben einen surjektiven Ringhomomorphimus $R \to \mathbb{C}[X]$. Dessen Kern ist gerade $I(X)$. Also ist

$$\mathbb{C}[X] \cong R/I(X).$$

In der Fachliteratur wird der Funktionenring meistens "Koordinatenring" genannt; immerhin wird er von den Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ erzeugt.

Der Pullback

Es seien $X \subseteq \mathbb{A}^n$, $Y \subseteq \mathbb{A}^m$ algebraische Mengen. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt regulär, wenn sie von der Form $x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ mit $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[X]$ ist.

Beobachtung: Für jede reguläre Funktion $g : Y \to \mathbb{C}$ ist die Funktion $g \circ f : X \to \mathbb{C}$ regulär. Die Abbildung $f^* : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]$ ist ein Ringhomomorphimus; man nennt sie den *Pullback* von f.

Beispiel: Es sei $X = \mathbb{A}^2$, $Y = \mathbb{A}^3$, und $f : X \to Y$ die Abbildung $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$. Der Ringhomomorphismus $f^* : \mathbb{C}[y_1, y_2, y_3] \to \mathbb{C}[x_1, x_2]$ bildet $p(y_1, y_2, y_3)$ auf $p(x_1^2, x_1x_2, x_2^2)$ ab.

Frage: Ist der Ringhomomorphimus f^* im obigen Beispiel surjektiv? Wenn nein, berechne man das Bild.
Ist er injektiv? Wenn nein, berechne man den Kern.

Funktorialität

Proposition 1: Es seien X, Y, Z algebraische Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ reguläre Abbildungen. Dann ist $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Proposition 2: Es seien X, Y algebraische Mengen. Dann ist der Pullback eine Bijektion zwischen der Menge der regulären Abbildungen von X nach Y und der Menge der Ringhomomorphismen von $\mathbb{C}[Y]$ nach $\mathbb{C}[X]$.

Sprechweise: Pullback ist ein kontravarianter treuer voller Funktor von der Kategorie der algebraischen Mengen in die Kategorie der Ringe.

Isomorphe Algebraische Mengen

Zwei algebraische Mengen X, Y nennen wir *isomorph* oder *biregulär equivalent* wenn es reguläre Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt, sodass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$ gilt.

Beispiel: Es sei $X = \mathbb{A}^1$ (die Gerade) und Y die Parabel $Y = Z(y_1^2 - y_2)$. Die regulären Abbildungen

$$f : X \to Y,\ (x_1) \mapsto (x_1, x_1^2);\ g : Y \to X,\ (y_1, y_2) \mapsto (y_1)$$

zeigen, dass X und Y isomorph sind.

Aus Proposition 1 folgt: zwei algebraische Mengen sind genau dann isomorph wenn ihre Funktionenringe isomorph sind.

Der Funktionenkörper

Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät. Der Funktionenring $\mathbb{C}[X]$ hat dann keine Nullteiler. Sein Quotientenkörper heißt *Funkionenkörper* und wird mit $\mathbb{C}(X)$ bezeichnet.

Beispiel: Es sei $X = Z(x_1^2 + x_2^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$. Dann ist

$$\mathbb{C}(X) = \mathrm{FF}(\mathbb{C}[x_1, x_2]/\langle x_1^2 + x_2^2 - 1\rangle_R)$$

Der Lokale Ring

Es sei X eine affine Varietät und $p \in X$. Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,p}$ ist Teilring von $\mathbb{C}(X)$ bestehend aus allen Brüchen der Form P/Q, $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, sodass $Q(p) \neq 0$ gilt.

Proposition: Für alle $P/Q \in \mathcal{O}_{X,p}$ existiert eine Zariski-offene Umgebung U von p, bijektiv zu einer affinen Varietät U' ist, sodass die Funktion P/Q einer regulären Funktion auf U entspricht.

Beweis: Wir wählen $U := \{q \in X \mid Q(q) \neq 0\}$. Es sei $U' \subset \mathbb{A}^{n+1}$ die Nullstellenmenge aller Gleichungen von X und einer neuen Gleichung $Q(x_1, \ldots, x_n)x_{n+1} - 1 = 0$.

$$f : U \to U',\ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, Q(x_1, \ldots, x_n)^{-1}),$$

$$g : U' \to U,\ (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

sind invers zueinander.

Mehr vom Lokalen Ring

Die Elemente von $\mathbb{C}(X)$ nennt man rationale Funktionen (obwohl es keine Funktionen auf ganz X sind). Der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,p}$ ist dann der Ring aller Funktionen, die in einer Zariski-Umgebung von p definiert sind.

In der Algebra heißt ein Ring *lokal*, wenn er genau ein maximales Ideal besitzt. $\mathcal{O}_{X,p}$ ist lokal im algebraischen Sinn: das maximale Ideal ist die Menge aller Funktionen, die bei p verschwinden.

Körperwechsel

Die algebraischen Konzepte Funktionenring, Funktionenkörper, lokaler Ring sind genauso sinnvoll, wenn man $\mathbb{C}$ durch einen anderen Körper $\mathbb{K}$ ersetzt; wir schreiben dafür $\mathbb{K}[X]$ bzw. $\mathbb{K}(X)$. Beim lokalen Ring muss der Körper im Kontext festgelegt werden.

Körpererweiterungen von $\mathbb{C}$ sind nie ein Problem. Teilkörper von $\mathbb{C}$ müssen zumindest die Koeffizienten der Gleichungen von X enthalten. Beim lokalen Ring: auch die Koordinaten des Punktes.

Wir sagen: $\mathbb{K}$ ist ein Definitionskörper von X, wenn $I(X)$ von Elementen in $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ erzeugt werden kann. (Oft ist $\mathbb{Q}$ ein Definitionskörper.)

Generische Punkte – Erste Definition

Es sei $X \subset \mathbb{A}^n$ eine affine Varietät.

Definition 1: Wenn P eine Eigenschaften von Punkten in X ist, die durch Gleichungen und Ungleichungen ausgedrückt werden kann, dann sagen wir "P ist für generische Punkte erfüllt", wenn die Menge $\{x \in X \mid \neg P(x)\}$ in einer echten algebraischen Teilmenge von X enthalten ist. (Generische Punkte gibt es eigentlich nicht, es ist nur eine Redeweise.)

Diese Definition ist zwar geometrisch anschaulich, manchmal aber unpraktisch. Man kann zum Beispiel nicht einfach sagen: "die Abbildung $f : X \to Y$ bildet generische Punkte von X auf generische Punkte von y ab".

Generische Punkte – Zweite Definition

Definition 2: Es sei $\mathbb{K}$ ein Definitionskörper von X. Ein Punkt $p = (x_1, \ldots, x_p) \in X$ heißt generischer Punkt von X, wenn jede reguläre Funktion $P \in \mathbb{K}[X]$, die $P(p) = 0$ erfüllt, gleich Null ist.

Beispiel: Es sei $X = Z(x_1^2 + x_2^2 - 1) \subset \mathbb{A}^2$ und $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Jede reguläre Funktion in $\mathbb{K}[X]$ lässt sich schreiben als $P = P_1 + x_2 P_2$ mit $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$, weil wir modulo $x_1^2 + x_2^2 - 1$ rechnen können. Es sei $P \in \mathbb{Q}[x_1, x_2]$ so dass $P(\pi/4, \sqrt{1 - \pi^2/16}) = 0$ gilt, also $P_1(\pi) + \sqrt{1 - \pi^2/16} P_2(\pi) = 0$. Da π transzendent ist – siehe `https://en.wikipedia.org/wiki/Lindemann-Weierstrass_theorem` –, folgt, dass $P = 0$ sein muss. Damit ist $(\pi/4, \sqrt{1 - \pi^2/16})$ generischer Punkt.

Generische Eigenschaften

Wenn p ein generischer Punkt ist, und A eine Eigenschaft, die durch Gleichungen und Ungleichungen mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ ausgedrückt werden kann, dann sind folgende Aussagen equivalent:

- p hat die Eigenschaft A;
- Die Menge aller Punkte in X, die A nicht erfüllt, ist enthalten in einer echten algebraischen Teilmenge.

Es folgt, dass alle generischen Punkte die gleichen Eigenschaften erfüllen.

Der lokale Ring beim generischen Punkt

Proposition: Wenn p ein generischer Punkt ist, dann ist der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,p}$ über $\mathbb{K}$ isomorph zu $\mathbb{K}(X)$.

Beweis: Wenn $P/Q \in \mathcal{O}_{X,p}$, dann ist $Q \in \mathbb{K}[X]$ und $Q(p) = 0$. Da p generisch ist, folgt $Q = 0$.

Der lokale Ring im Beispiel oben ist der Körper $\mathbb{Q}(\pi, \sqrt{1-\pi^2/16})$. Der Funktionenkörper über $\mathbb{Q}$ ist $\mathrm{FF}(\mathbb{Q}[x_1, x_2]/\langle x_1^2 + x_2^2 - 1\rangle_R)$. Der Isomorphismus ist dann einfach die Auswertung $f \mapsto f(\pi, \sqrt{1-\pi^2/16})$.