Kommutative Algebra
und Algebraische Geometrie

JOHANNES KEPLER
UNIVERSITY LINZ

Josef Schicho, JKU, RISC

January 25, 2024

Der Grad einer Varietät

Der Grad der Veronese-Varietät ist d^n, weil sodass $f_*(1) = [V_{n,m}] = d^n \nu^{N-n}$ gilt. Oft kann man den Grad einer Varietät mit folgender Formel bestimmen:

Es sei $X \in \mathbb{P}^n$ eine Varietät, $\dim(X) = d$. Es sei $H \in A^1(X)$ die Klasse der Hyperebenenschnitte (alle Hyperebenenschnitte sind equivalent). Dann gilt $\deg(H^d) = \deg(X)$.

Beweis: nach Definition ist $\deg(X)$ die Anzahl der Schnittpunkte mit einer linearen Untervarietät $L \subset \mathbb{P}^n$ von Kodimension d. Statt dessen können wir aber auch d generische Hyperebenen mit X schneiden.

Beispiel 2: die Segre-Einbettung

Es sei $X = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$, $N = (n+1)(m+1) - 1 = nm + n + m$, $Y = \mathbb{P}^N$, und $f = \sigma_{m,n} : X \to Y$ die Segre-Einbettung. $A^\bullet(X) = \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2]/\langle \zeta_1^{m+1}, \zeta_2^{n+1} \rangle$, $A^\bullet(Y) = \mathbb{Z}[\nu]/\langle \nu^{N+1} \rangle$.

Hier erhalten wir mit einer ähnlichen Rechnung wie vorhin den Ring-Homomorphismus $f^* : \nu \mapsto \zeta_1 + \zeta_2$ und den Gruppenhomomorphimus $f_* : \zeta_1^a \zeta_2^b \mapsto \binom{m+n-a-b}{m-a} \nu^{a+b+N-n}$. Für den Grad der Segre-Varietät ergibt sich $\deg(\Sigma_{m,n}) = \binom{m+n}{m}$.

Mehr Abbildungen

Die Definition des Pullbacks und alle erwähnten Eigenschaften lassen sich auf beliebige reguläre Abbildungen verallgemeinern. Dazu brauchen wir eine Verallgemeinerung des Transversalitätsbegriffs:

Es sei $f : X \to Y$ eine regeläre Abbildung zwischen glatten Varietäten X, Y. Eine Untervarietät $Z \subset Y$ heißt *generisch transversal zu* f, wenn $f^{-1}(Z)$ die gleiche Kodimension wie Z hat und keine mehrfachen Komponenten besitzt. Equivalent dazu: bei jedem generischen Punkt von $f^{-1}(Z)$ wird das Ideal von $f^{-1}(Z)$ erzeugt von Polynomen, die man durch Einsetzen von f in Polynome des Verschwindungsideals von Z erhält.

Die Verallgemeinerungen

Verallgemeinertes Moving Lemma: Für jede Abbildung f und jeden Zykel existiert ein equivalenter Zykel, der generisch transversal zu f ist.

Verallgemeinerung von "Schnitt erhält Equivalenz": Wenn A_1, A_2 equivalent und generisch transversal zu f sind, dann sind $f^{-1}(A_1)$ und $f^{-1}(A_2)$ ebenfalls equivalent.

Referenz für beide: Theorem 1.23 und Lemma A.2 in [EiHa].
Wir erhalten wieder einen Ring-Homomorphismus
$f^* : A^\bullet(Y) \to A^\bullet(X)$.

Propere Abbildungen

Das Urbild von algebraischen Mengen ist immer algebraisch, das Bild von algebraischen Mengen im allgemeinen nicht. Um einen Pushforward sinnvoll zu definieren, brauchen wir eine zusätzliche Annahme über $f : X \to Y$.

Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *proper*, wenn für jede Varietät Z die Abbildung $(f, \mathrm{id}_Z) : (X \times Z) \to (Y \times Z)$ abgeschlossen ist, d.h. abgeschlossene Teilmengen auf abgeschlossene Teilmengen abbildet in der Zariski-Topologie.

- Abgeschlossene Einbettungen sind proper.
- Wenn X projektiv ist, dann ist die konstante Abbildung $X \to \mathbb{A}^0$ proper (es reicht, den Fall $X = \mathbb{P}^n$ zu beweisen).

Projektiv impliziert Proper

Satz: Wenn X, Y projektiv sind, und $f : X \to Y$ eine reguläre Abbildung ist, dann ist f proper.

Beweis: Die konstante Abbildung $X \to \mathbb{A}^0$ ist proper. Daher ist für jede Varietät Z die Abbildung $\pi_Z : (X \times Z) \to Z$ abgeschlossen. Wenn wir $Z = Y$ setzen, erhalten wir, dass $\pi_X : (X \times Y) \to Y$ abgeschlossen ist. Die Abbildung π_X ist sogar proper, d.h. für alle T ist die Abbildung $(X \times Y \times T) \to (Y \times T)$ abgeschlossen. Um das zu zeigen, setzen wir Z gleich $Y \times T$.
Es sei $G(f) \subset (X \times Y)$ der Graph von f. Dieser ist isomorph zu X. Der Isomorphismus $X \to G(f)$ ist proper, die abgeschlossene Einbettung $G(f) \to (X \times Y)$ ist proper, und die Projektionsabbildung $(X \times Y) \to Y$ proper. Komposition von properen Abbildungen ist wieder proper, also ist f proper.

Vielfachheit von Bildern

Wir haben vielfache *Urbilder* gesehen (bei der Definition von Equivalenz, oder bei der Definition von Transversalität zu einer Abbildung). Hier ist ein Beispiel mit Vielfachheit von *Bildern*.

Example: $X \subset \mathbb{P}^3$ ist die Quadrik definiert durch $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$, $Y = \mathbb{P}^2$, $f : X \to Y$ ist die Abbildung $(x_0 : x_1 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2)$. Sie ist auf ganz X definiert.

Schnitte von X mit generischen Ebenen werden auf durch f auf Kegelschnitte in Y abgebildet. Alle Ebenenschnitte sind equivalent, und daher macht es Sinn, dass der Pushforward die Klasse der Ebenenschnitte auf 2ζ abbildet.

Das Bild eines Schnitts mit einer Ebene durch $(0 : 0 : 0 : 1)$ ist aber eine Gerade.

Der Grad einer Abbildung

Im obigen Beispiel ist klar, dass die Gerade im Bild Vielfachheit 2 hat. Wie kann man Bild-Vielfachheit exakt definieren?

Definition: Es seien X, Y Varietäten von gleicher Dimension und $f : X \to Y$ eine reguläre Abbildung. Der Grad $\deg(f)$ ist definiert als die Anzahl der Punkte der generischen Faser (diese ist endlich wegen Sard's Theorem).

Beispiel: Die Abbildung $f : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$,
$(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_0^2 : x_1^1 : x_2^2)$ hat Grad 4.
Wenn f nicht generisch surjektiv ist, dann ist $\deg(f) = 0$.

Es sei $f : X \to Y$ proper und $Z \subset X$ eine Untervarietät. Dann definieren wir $f_*(Z) := \deg(f|_Z)f(Z)$ im Fall $\dim(f(Z)) = \dim(Z)$. Wenn $\dim(f(Z)) < \dim(Z)$ ist, dann setzen wir $f_*(Z) = 0$.

Pushforward allgemein

Satz: Es seien X und Y glatte Varietäten, $f : X \to Y$ proper, $k \leq \dim(X)$, $A_1, A_2 \in Z^k(X)$. Wenn $A_1 \sim A_2$, dann gilt auch $f_*(A_1) \sim f_*(A_2)$.
Daher existiert der Gruppenhomomorphismus $f_* : A^\bullet(X) \to A^\bullet(Y)$.

Beweis: [EiHa], Theorem 1.20.

Die Push-Pull-Formel ist auch in diesem allgemeinen Fall gültig (Theorem 1.23(b) in [EiHa]).

Abzählen von Punkten

Es sei $X \subset \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät von Dimension d, $A \in Z^d$ ein Zykel von Dimension 0, also eine formale Summe $A = m_1 p_1 + \cdots + m_r p_r$ von Punkten $p_1, \ldots, p_r$ mit Koeffizienten $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}$. Wir definieren $\deg(A) = m_1 + \cdots + m_r$.

Mit den erwähnten Sätzen ist es leicht, zu zeigen, dass der Grad nur von der Klasse abhängt: die konstante Abbildung $c : X \to \mathbb{A}^0$ ist proper, und der Pushforward c_* eingeschränkte auf $Z^d(X)$ ist genau der Grad. wenn $A_1 \sim A_2$ ist, dann folgt $\deg(A_1) = c_*(A_1) = c_*(A_2) = \deg(A_2)$.

Zerlegung von kubischen Polynomen

Der Vektorraum aller homogenen kubischen Polynom hat Dimension $\binom{5}{2} = 10$. Unter diesen kubischen Polynomen existiert eine algebraische Teilmenge von Dimension 8, die sich als Produkt einer linearen und einer quadratischen Form schreiben lassen. Ein generischer Vektorraum von Dimension 3 schneidet diese Teilmenge in endlich vielen Geraden durch 0 (wenn ein Polynom zerlegbar ist, sind auch alle skalaren Vielfachen zerlegbar). In wie vielen?

Projektive Formulierung: Es sei $m : (\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5) \to \mathbb{P}^9$ die Abbildung, die jedem Paar von Koeffizientenvektoren einer linearen bzw. quadratischen Form den Koeffizientenvektor des Produkts abbildet. Wir fragen nach dem Grad des 7-dimensionalen Bildes in $X \subset \mathbb{P}^9$.

Rechnung

$A^\bullet(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^5) = \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2]/\langle \zeta_1^3, \zeta_2^6 \rangle$, $A^\bullet(\mathbb{P}^9) = \mathbb{Z}[\nu]/\langle \nu^{10} \rangle$.

Um den Pullback zu kennen, reicht es, $m^*(\nu) = x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2$ zu kennen. Multiplikation ist bilinear, also ist das Urbild einer Hyperebene durch eine Gleichung von Bi-Grad $(1, 1)$ definiert (nämlich die, die man durch Einsetzen der bilinearen Funktion in die lineare Form erhält). Es folgt $m^*(\nu) = \zeta_1 + \zeta_2$.

Die gesuchte Zahl $\deg(X)$ ist der Grad von $(m^*(\nu))^7 \in A^7(\mathbb{P}^2 \times P^5)$.

$$(\zeta_1 + \zeta_2)^7 = \sum_{i=0} \binom{7}{i} \zeta_1^i \zeta_2^{n-i} = \binom{7}{2} \zeta_1^2 \zeta_2^5 = 21\zeta_1^2\zeta_2^5$$

Also ist die Antwort 21.

Drei Faktoren

Gleiche Frage für die Multiplikationsabbildung von drei linearen Formen $m : (\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \to \mathbb{P}^9$. Das Bild $Y \subset \mathbb{P}^9$ hat Dimension 6.

$A^\bullet(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}[\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3]/\langle \zeta_1^3, \zeta_2^3, \zeta_3^3 \rangle$, $A^\bullet(\mathbb{P}^9) = \mathbb{Z}[\nu]/\langle \nu^{10} \rangle$.

$m^*(\nu) = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$, weil die Multiplikation linear in allen drei Faktoren ist.

$$(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)^6 = \sum_{i,j,k=0}^{i+j+k=6} \binom{6}{i,j,k} \zeta_1^i \zeta_2^j \zeta_3^k = \binom{6}{2,2,2} \zeta_1^2 \zeta_2^2 \zeta_3^2 = 90 \zeta_1^2 \zeta_2^2 \zeta_3^2$$

Drei Faktoren

Es gibt also 90 Triple von Linearformen (bis auf Skalare), deren Produkt in einem fixen generischen Vektorraum von kubischen Formen von Kodimension 6 liegen.

In Unterschied zum vorigen Beispiel mit nur zwei Faktoren ist hier die Abbildung m nicht mehr generisch injektiv. Für fast alle zerlegbaren kubischen Formen gibt es 6 Triple von Linearformen, weil die Faktorisierung nur eindeutig bis auf Permutation von Faktoren ist.
Um das richtige Ergebnis zu erhalten, müssen wir daher noch durch $3! = 6$ dividieren: $90/6 = 15$.