Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Josef Schicho, JKU, RISC

January 18, 2024

Klasse der Diagonale im Fall $m = n$

Welche Klasse hat die Untervarietät $\Delta := \{(x, x) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n\}$ von $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$?

Die Klasse $[\Delta]$ liegt in $A^n(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n)$, und diese Chow-Gruppe ist erzeugt von $\zeta_1^n, \zeta_1^{n-1}\zeta_2, \dots, \zeta_2^n$. Ansatz:

$$[\Delta] = x_0\zeta_1^n + x_1\zeta_1^{n-1}\zeta_2 + \dots + x_n\zeta^n = \sum_{i=0}^{n} x_i\zeta_1^{n-i}\zeta_2^i$$

mit unbekannten Koeffizienten $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$.

Für fixes i wählen wir generische lineare Unterräume $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}^n$ von Dimension $\dim(L_1) = i$, $\dim(L_2) = n - i$. Dann ist $\Delta \cap (L_1 \times L_2) = \{(x, x) \mid x \in L_1 \cap L_2\}$ ein Punkt und hat daher Klasse $\zeta_1^n\zeta_2^n$. Also ist

$$1 = [\Delta \cap (L_1 \times L_2)] = [\Delta] \cdot [L_1 \times L_2] = (x_0\zeta_1^n + \dots + x_n\zeta_2^n)\zeta_1^{n-i}\zeta_2^i = x_i$$

Fixpunkte eines Isomorphimus

Es sei $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$ ein projectiver Automorphismus. Dann ist $Y := \{(x, \phi(x)) \mid x \in \mathbb{P}^n\}$ equivalent zu Δ. Die Schnittmenge $\Delta \cap Y$ ist isomorph zur Menge der Fixpunkte. Für generisches ϕ ist der Schnitt transversal und wir haben genau

$$[Y] \cdot [\Delta] = (\zeta_1^n + \zeta_1^{n-1}\zeta_2 + \cdots + \zeta_2^n)^2 = n + 1$$

Schnittpunkte.

Man kann das auch ohne Schnitt-Theorie berechnen: ϕ ist gegeben durch eine $(n+1) \times (n+1)$ Matrix. Die Fixpunkte entsprechen den Eigenvektoren, und davon gibt es $n + 1$.

Projektive Endomorphismen

Eine reguläre Abbildung $f : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^n$ ist gegeben durch $n+1$ homogene Polynome $f_0, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ von gleichem Grad d. Die Abbildung f ist surjektiv, aber für $d > 1$ nicht injektiv: die generische Faser ist der Schnittpunkt von n Hyperflächen von Grad d und besteht daher aus d^n Punkten.

Um die Anzahl der Fixpunkte zu berechnen, multiplizieren wir die Klasse von $Y := \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{P}^n\}$ mit Δ. Vorher sollten wir noch $[Y]$ bestimmen. Wir setzen wieder an $Y = \sum_{i=0}^n x_i \zeta_1^{n-i} \zeta_2^i$ und bestimmen

$$x_i = [Y] \cdot [L_1 \times L_2] = |\{(x, f(x)) \mid x \in L_1, f(x) \in L_2\}|$$

Die Menge $\{(x, f(x)) \mid x \in L_1, f(x) \in L_2\}$ ist der Schnitt von gegeben durch i Gleichungen von Grad d und $n - i$ linearen Gleichungen. Daher: $x_i = d^i$.

Fixpunkte eines Endomorphismus

$$[Y] \cdot [\Delta] = (\zeta_1^n + d\zeta_1^{n-1}\zeta_2 + \cdots + d^n\zeta_2^n)(\zeta_1^n + \zeta_1^{n-1}\zeta_2 + \cdots + \zeta_2^n)$$

$$= 1 + d + \cdots + d^n = \frac{d^{n+1} - 1}{d - 1}.$$

Wenn $n = 1$ ist, haben wir $d + 1$ Fixpunkte. Dieses Ergebnis kann man auch direkt bestimmmen: die Fixpunkte sind die Lösungen der Gleichung $x_1 f_0(x_0, x_1) - x_1 f_0(x_0, x_1) = 0$. Da $\deg(f_0) = \deg(f_1) = d$ gilt, hat die Gleichung Grad $d + 1$.

Funktorialität

Ein Isomorphismus zwischen Varietietäten X und Y induziert einen Ringisomorphismus der Chow-Ringe. Können wir das verallgemeinern auf beliebige Abbildungen $f : X \to Y$?

Wir behandeln zuerst den einfacheren Fall, dass X eine Untervarietät von Y ist, und $f : X \to Y$ die abgeschlossene Einbettung ist.

- Jeder Zykel in $Z^k(X)$ ist auch Zykel in Y. Die Kodimension muss korrigiert werden: $+\mathrm{codim}_Y(X)$.
- Equivalente Zykel in $Z^k(X)$ sind auch equivalent in $Z^{k+\mathrm{codim}_Y(X)}(Y)$.
- Wir erhalten einen Gruppenhomomorphimus $f_* : A^k(X) \to A^{k+\mathrm{codim}_Y(X)}(Y)$ (Pushforward).

Pullback

- Für jeden Zykel $A \in Z^k(Y)$, der X generisch transversal schneidet, ist der Schnitt-Zykel $A \cap X \in Z^k(X)$ definiert.
- Wenn $A_1, A_2 \in Z^k(Y)$ equivalent sind und X generisch transversal schneiden, dann sind auch die Schnitt-Zykel $A_1 \cap X, A_2 \cap X \in Z^k(X)$ equivalent (Schnitt erhält Equivalenz).
- Wir erhalten einen Gruppenhomomorphismus $f^* : A^k(Y) \to A^k(X)$ (Pullback).
- Wenn $A_1 \in Z^{k_1}(Y)$ und $A_2 \in Z^{k_2}(Y)$ zusätzlich auch einander generisch transversal schneiden, dann gilt $f^*(A_1) \cap f^*(A_2) = A_1 \cap A_2 \cap X = f^*(A_1 \cap A_2)$.
- $f^* : A^\bullet(Y) \to A^\bullet(X)$ ist ein Ringhomomorphismus.

Push-Pull-Formel

Satz: Es seien $f : X \to Y$ eine abgeschlossene Einbettung, $A \in A^k(X)$, $B \in A^l(Y)$. Dann gilt

$$f_*(A \cdot f^* B) = f_*(A) \cdot B.$$

Beweis: Wir wählen Representanten $A_0 \in A$, $B_0 \in B$, sodass B_0 und X generisch transversal schneiden und A_0 und $(B_0 \cap X)$ transversal schneiden. Dann sind beide Seiten der Gleichung gleich $[A_0 \cap B_0 \cap X]$.

Beispiel 1: die Veronese-Abbildung

Es sei $X = \mathbb{P}^n$, $N = \binom{n+d}{n} - 1$, $Y = \mathbb{P}^N$, und $f = v_{n,d} : X \to Y$ die Veronese-Abbildung.

$A^\bullet(X) = \mathbb{Z}[\zeta]/\langle \zeta^{n+1} \rangle$, $A^\bullet(Y) = \mathbb{Z}[\nu]/\langle \nu^{N+1} \rangle$.

$f^*(\nu)$ ist der Schnitt der Veronese-Varietät mit einer Hyperebene: eine hyperfläche von Grad d. Weil ν den ganzen Ring $A^\bullet(Y)$ erzeugt, ist damit der Homomorphimus $f^* : A^\bullet(Y) \to A^\bullet(X)$ durch $\nu \mapsto d\zeta$ schon bestimmt.

Für $k = 0, \ldots, n$ definieren wir die Unbekannte $x_k \in \mathbb{Z}$ durch die Gleichung $f_*(\zeta^k) = x_k \nu^{k+N-n}$. Da ζ^n die Klasse eines Punktes ist, gilt $x_n = 1$. Um $x_0, \ldots, x_{n-1}$ zu bestimmen, verwenden wir die Push-Pull-Formel.

$$f_*(\zeta^k \cdot f^*(\nu^\ell)) = f_*(\zeta^k \cdot \nu^\ell) \implies d^\ell x_{k+\ell} = x_k$$

Es folgt $x_k = d^{n-k}$.