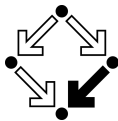


# Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie



Josef Schicho, JKU, RISC

January 10, 2024

## Schnitt erhält Äquivalenz

**Satz:** Es sei  $X$  eine glatte Varietät,  $A_1, A_2$  und  $B$  Zyklen. Wenn  $A_i$  und  $B$  generisch transversal schneiden für  $i = 1, 2$ , und  $A_1 \sim A_2$  ist, dann gilt  $A_1 \cap B \sim A_2 \cap B$ .

*Beweis:* deJong et al, the Stacks project, Tag 0AZ6.

**Definition:** Es sei  $X$  eine glatte Varietät,  $A \in Z^k(X)$ ,  $B \in Z^l(X)$ . Wir definieren:

$$[A] \cdot [B] = [A' \cap B],$$

wobei  $A' \sim A$  generisch transversal zu  $B$  gewählt ist.

$\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 

Es seien  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $X := \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ . Jede irreduzible Hyperfläche in  $X$  ist die Nullstellenmenge eines *bi-homogenen Polynoms*  $P \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_n]$ . Ein Polynom heißt bi-homogen von Bi-Grad  $(p, q)$ , wenn

$$P(\lambda x_0, \dots, \lambda x_m, \mu y_0, \dots, \mu y_n) = \lambda^p \mu^q P(x_0, \dots, x_m, y_0, \dots, y_n)$$

für alle  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  gilt.

Zwei Hyperflächen von Bigrad  $(p_1, q_1)$  und  $(p_2, q_2)$  sind genau dann equivalent, wenn  $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$  ist.

**Frage:** Man gebe für den Fall  $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$  eine Familie an, die die Äquivalenz zeigt.

## Chow-Gruppe von $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$

Die Chow-Gruppe  $A^1(X)$  ist daher isomorph zu  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Erzeuger von Bi-Grad  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  sind  $\{(x, y) \mid x_0 = 0\}$  und  $\{(x, y) \mid y_0 = 0\}$ . Wir nennen sie  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ .

Der Schnitt von  $m$  generischen Hyperflächen von Bi-Grad  $(1, 0)$  ist  $\{p\} \times \mathbb{P}^n$ , und der Schnitt von  $m + 1$  solchen generischen Hyperflächen ist leer. Daraus erhalten wir die Relationen  $\zeta_1^{m+1} = \zeta_2^{n+1} = 0$ .

Für  $k \leq m + n$  ist die Chow-Gruppe  $A^k$  erzeugt von den Klassen  $\zeta_1^r \zeta_2^s$  sodass  $r \leq m$ ,  $s \leq n$ ,  $r + s = k$  (Theorem 2.10 in [EiHa]).

## Beispiel $m = n = 1$

Es sei  $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Dann ist

$$A^0(X) = \mathbb{Z},$$

$$A^1(X) = \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_{\mathbb{Z}},$$

$$A^2(X) = \langle \zeta_1 \zeta_2 \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Alle Punkte sind in der Klasse  $\zeta_1 \zeta_2$ .

Bi-homogene Polynome von Bi-Grad  $(a, b)$  – zum Beispiel  $x_1^2 y_0^3 + x_0 x_1 y_0 y_1^2$  ist bi-homogen von Bi-Grad  $(2, 3)$  – definieren Kurven. Eine Kurve von Bi-Grad  $(a_1, b_1)$  und eine Kurve von Bi-Grad  $(a_2, b_2)$  ohne gemeinsame Komponente schneiden einander einander in endlich vielen Punkten. **Frage:** In wie vielen Punkten?