Kommutative Algebra
und Algebraische Geometrie

Josef Schicho, JKU, RISC

January 10, 2024

Schnitt erhält Equivalenz

Satz: Es sei X eine glatte Varietät, A_1, A_2 und B Zyklen. Wenn A_i und B generisch transversal schneiden für $i = 1, 2$, und $A_1 \sim A_2$ ist, dann gilt $A_1 \cap B \sim A_2 \cap B$.

Beweis: deJong et al, the Stacks project, Tag 0AZ6.

Definition: Es sei X eine glatte Varietät, $A \in Z^k(X)$, $B \in Z^l(X)$. Wir definieren:

$$[A] \cdot [B] = [A' \cap B],$$

wobei $A' \sim A$ generisch transversal zu B gewählt ist.

$\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$

Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $X := \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$. Jede irreduzible Hyperfläche in X ist die Nullstellenmenge eines *bi-homogenen Polynoms* $P \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_m, y_0, \ldots, y_n]$. Ein Polynom heißt bi-homogen von Bi-Grad (p, q), wenn

$$P(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n, \mu y_0, \ldots, \mu y_n) = \lambda^p \mu^q P(x_0, \ldots, x_m, y_0, \ldots, y_m)$$

füe alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt.

Zwei Hyperflächen von Bigrad (p_1, q_1) und (p_2, q_2) sind genau dann equivalent, wenn $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$ ist.

Frage: Man gebe für den Fall $(p_1, q_1) = (p_2, q_2)$ eine Familie an, die die Equivalenz zeigt.

Chow-Gruppe von $\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$

Die Chow-Gruppe $A^1(X)$ ist daher isomorph zu $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Erzeuger von Bi-Grad $(1,0)$ und $(0,1)$ sind $\{(x,y) \mid x_0 = 0\}$ und $\{(x,y) \mid y_0 = 0\}$. Wir nennen sie ζ_1 und ζ_2.

Der Schnitt von m generischen Hyperflächen von Bi-Grad $(1,0)$ ist $\{p\} \times \mathbb{P}^n$, und der Schnitt von $m+1$ solchen generischen Hyperflächen ist leer. Daraus erhalten wir die Relationen $\zeta_1^{m+1} = \zeta_2^{n+1} = 0$.

Für $k \leq m+n$ ist die Chow-Gruppe A^k erzeugt von den Klassen $\zeta_1^r \zeta_2^s$ sodass $r \leq m$, $s \leq n$, $r+s=k$ (Theorem 2.10 in [EiHa]).

Beispiel $m = n = 1$

Es sei $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. Dann ist
$A^0(X) = \mathbb{Z}$,
$A^1(X) = \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$,
$A^2(X) = \langle \zeta_1 \zeta_2 \rangle_{\mathbb{Z}}$.
Alle Punkte sind in der Klasse $\zeta_1 \zeta_2$.

Bi-homogene Polynome von Bi-Grad (a, b) – zum Beispiel $x_1^2 y_0^3 + x_0 x_1 y_0 y_1^2$ ist bi-homogen von Bi-Grad $(2, 3)$ – definieren Kurven. Eine Kurve von Bi-Grad (a_1, b_1) und eine Kurve von Bi-Grad (a_2, b_2) ohne gemeinsame Komponente schneiden einander einander in endlich vielen Punkten. **Frage:** In wie vielen Punkten?